

对称窗函数的幅值谱特性

陈奎孚 张森文 高小榕

(中国农业大学)

(清华大学)

摘 要 研究了对称窗的幅值谱 $|W(\omega)|$ 特性: 1) 在 $\omega=0$ 处取得最大值; 2) 主瓣宽度大于 $4\pi/T$, 主瓣内至少有两条 FFT 谱线; 3) 距原点 ($\omega=0$) 最近的两条 FFT 谱线分别为最高和次高; 4) 有限域窗函数总存在旁瓣。根据 1) 可由搜索最大值的方法无偏估计单频信号的参数; 特性 2)、3) 为由信号 FFT 离散的谱线确定搜索范围提供了理论基础; 特性 4) 表明通过选择窗函数消除旁瓣不可能。

关键词 信号处理 窗函数 谱分析

加窗是提高信号分析质量的一个重要而不可或缺的措施, 选用合理的窗函数能够抑制假频和提高信噪比。假频出现的原因是常用的窗函数的幅值谱存在旁瓣。无限域上的高斯窗和傅立叶核窗函数没有旁瓣, 而实际的操作只能在有限的时域上进行, 但有时域的窗函数是否总存在旁瓣, 未见文献给出确切的答案。作者研究表明不存在无旁瓣的有限域的窗函数, 因而企图通过精心选择窗函数消除假频是徒劳的。目前相当多的文献研究用主瓣内的几条谱线校正 FFT 的结果^[1~6], 但并未证明主瓣内至少存在两条谱线, 如何由 FFT 离散谱线确定主瓣位置。作者证明了衰减窗函数的主瓣内至少存在两条 FFT 谱线, 距 $\omega=0$ 两条谱线分别为最高和次高, 从而为确定主瓣位置和校正准确的信号参数提供了理论基础。作者指出窗函数的幅值谱在 $\omega=0$ 处取得最大值, 从而根据这一性质无论何种窗函数均可采用统一的计算公式搜索最大值来获得单频信号参数的无偏估计, 因此前置的整周期采样硬件设备完全没有必要^[7]。对于多频信号, 窗谱的衰减性表明只要频率较远时仍可使用搜索法高精度估计信号参数。

1 最大值特性

对周期信号和平稳随机信号傅立叶谱分析之前, 一般要加对称窗截断。设 $w(t)$ 是定义在 $[-T/2, T/2]$ 上的非负对称窗函数, 它的傅立叶谱为

$$W(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} w(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1)$$

利用 $w(t)$ 的对称性, 有

$$W(\omega) = 2 \int_0^{T/2} w(t) \cos(\omega t) dt \quad (2)$$

这是一个实偶函数, 即 $W(\omega) = W(-\omega)$ 。

关于 $W(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处有如下性质。

定理 1 若 $w(t)$ 是 $[-T/2, T/2]$ 上连续函数, 则 $|W(\omega)| \leq |W(0)|$, 当且仅当 $\omega=0$ 时

收稿日期: 1998-06-22

陈奎孚, 博士生, 北京市海淀区清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)基础科学部, 100083

等号成立。

定理的证明见文献[8]。

取单频解析信号 $x(t) = A \exp[j(\omega t + \varphi)]$, 令加窗后的傅立叶变换为 $X(\omega)$, 根据定理 1, $|X(\omega)|$ 在 $\omega = \omega_0$ 处取得最大值, 它可借助于迭代、优化等方法找到, 从而信号频率 ω_0 可无偏确定。一旦有了 ω_0 则由下式

$$W(\omega_0) = 2A \exp(j\varphi) \int_0^{T/2} w(t) dt$$

可准确确定另外两个 A 和 φ 参数。

实单频信号 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, 实际是由两个频率为 $-\omega_0$ 和 $+\omega_0$ 的解析单频信号合成。但 ω_0 较大时, 由下文的衰减性, 可近似认为 $|X(\omega)|$ 在 $\omega = \omega_0$ 处取得最大值。

2 主瓣特性

主瓣的定义有多种, 本文定义为: 距原点 ($\omega = 0$) 最近的两个零点之间图形为主瓣, $W(0)$ 称为瓣高, 两个离原点最近的两个零点之间距离称为主瓣宽, 记为 L 。

关于主瓣, 可证明具有如下性质。

定理 2 1) 主瓣在 $[0, 2\pi/T]$ 内单调减; 2) 主瓣宽度 $L > 2\pi/T$; 3) $W(\omega)$ 在 $[-\pi/T, \pi/T]$ 内是凸函数。

证明:

1) 对式(2)求导有

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = -2 \int_0^{T/2} w(t) \sin(\omega t) dt$$

因为 $w(t) \geq 0$, 所以 $\omega T/2 = \pi$ 时, $\frac{dW(\omega)}{d\omega} = 0$, 故在 $[0, 2\pi/T]$ 上 $W(\omega)$ 单调减。

2) 由式(2)有

$$W(\pi/T) = 2 \int_0^{T/2} w(t) \cos(\pi t/T) dt \quad (3)$$

在积分区间内, 被积函数为非负且不恒为 0 的连续函数, 故 $W(\pi/T) > 0$, 而 $W(0) > 0$, 又由 1) 的单调减性质, 可知 $W(\omega)$ 在 $[0, \pi/T]$ 上不可能有零点。由 $W(\omega)$ 对称性可知 $[-\pi/T, 0]$ 上也无零点。所以主瓣宽度 $L > 2\pi/T$ 。

3) 对式(2)求两阶导数有

$$\frac{d^2W(\omega)}{d\omega^2} = -2 \int_0^{T/2} t^2 w(t) \cos(\omega t) dt$$

当 $|\omega| = \pi/T$ 时, $\frac{d^2W(\omega)}{d\omega^2} > 0$, 即证 $[-\pi/T, \pi/T]$ 内为凸函数。

进一步, 对于常用的不严格单调增的窗函数 (即 $w(t) \geq 0, t \in (0, T/2)$), 有:

定理 3 1) 主瓣宽度 $L > 4\pi/T$; 2) $|W(\omega)| = |W(\omega + 2k\pi/T)|, \omega \in [0, 2\pi/T], k > 0$ 或 $k < -2$ 。

由本定理可知主瓣内至少有两条 FFT 谱线, 而且距信号频率最近的两条谱线的幅值分别为最大和次大, 这为由 FFT 谱线确定主瓣的位置提供了理论依据。

定理 3 2) 的证明非常冗长乏味, 我们只给出 1) 的证明。

对式(2)分部积分得

$$W(\omega) = \frac{2}{\omega} \left\{ W(T/2) \sin(\omega T/2) + \int_0^{T/2} [-w(t)] \sin(\omega t) dt \right\} \quad (4)$$

当 $\omega = 2\pi/T$ 时, 式(4)括号内第一项非负, 第二项因 $w(t) = 0$ 而取非负值, 于是 $W(2\pi/T) = 0$, 所以 $(0, 2\pi/T)$ 内 $W(\omega)$ 无零点, 而 $W(\omega)$ 又是偶函数, 可知 $(-2\pi/T, 2\pi/T)$ 内必无零点, 故主瓣宽度 $L = 4\pi/T$ 。

3 衰减性和振荡性

上文多次提及窗谱的衰减性, 关于它有如下性质。

定理 4 若 $w(t)$ 为连续函数, 则当 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, $|W(\omega)| \rightarrow 0$ 。

这个性质保证了多频率信号的频率相隔较远时可忽略相互之间的影响, 每个频率成份参数估计可按单频信号估计办法估计。这个定理证明见文献[9]。

不同的窗函数, 它的衰减特性不一样。当 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, 连续窗函数的窗谱 $|W(\omega)|$ 都是无穷小量, 但趋于零的速度不同, 我们可以引进衰减阶的概念。

定义 1 如果 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, $|W(\omega)|$ 是 $|1/\omega|^K$ 的同阶小量, 称 $|W(\omega)|$ 的衰减阶为 K 。

关于衰减阶, 我们有如下性质:

定理 5 若 $w(t) \in C^m[-T/2, T/2]$, 且 $w^{(k)}(T/2) = w^{(k)}(-T/2) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, m$, 且 $w^{(m+1)}$ 在 $[-T/2, T/2]$ 上分段连续, 则 $W(\omega)$ 的衰减阶为 $m+2$, 即 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, $|W(\omega)| = O(|1/\omega|^{m+2})$ 。

这条性质说明, 窗函数越光滑, $|\omega|$ 趋于无穷时 $W(\omega)$ 衰减越快, 因而多频信号相互泄漏的影响越小。

证明: 对式(1)右边分部积分有

$$W(\omega) = \frac{\exp(-j\omega T/2)}{(-j\omega)} w(t) \Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\exp(-j\omega t)}{(-j\omega)} w'(t) dt \quad (5)$$

利用定理 5 的假设条件, 式(5)右边第一项为零, 对第二项再做分部积分, 如此进行下去, 有

$$W(\omega) = \frac{1}{(-j\omega)^{m+1}} \int_{-T/2}^{T/2} w^{(m+1)}(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (6)$$

由定理前提 $w^{(m+1)}(t)$ 为分段连续函数, 可知式(6)的积分项在 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时是 $|1/\omega|$ 的同阶^[9], 所以 $|W(\omega)| = O(|1/\omega|^{m+2})$ 。定理 5 即证。

由于 $w(t)$ 不可能无穷阶光滑 (否则必恒为 0), 一定存在一个正整数 M 使 $w^{(M)}(t)$ 不再可导, 对于初等函数拼成的 $w(t)$, $w^{(M)}(t)$ 一定是分段连续函数。 $w^{(M)}(t)$ 的间断点既可能在 $t = \pm T/2$ 处, 也可能在 $[-T/2, T/2]$ 内。假定发生在 $t = \pm T/2$ 处, 由式(5)可知

$$W(\omega) = \frac{1}{(-j\omega)^M} \int_{-T/2}^{T/2} w^{(M)}(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (7)$$

对式(7)积分项分部积分, 有:

$$W(\omega) = \frac{1}{(-j\omega)^M} \left\{ \frac{1}{-j\omega} [\exp(-j\omega T/2) w^{(M)}(T/2) - \exp(j\omega T/2) w^{(M)}(-T/2)] - \int_{-T/2}^{T/2} w^{(M+1)}(t) \exp(-j\omega t) dt \right\} \quad (8)$$

当 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, 式(8)的积分项趋于零, 将其略去, 有:

$$W(\omega) = \frac{1}{(-j\omega)^{M+1}} \{ \exp(-j\omega T/2) w^{(M)}(T/2) - \exp(j\omega T/2) w^{(M)}(-T/2) \}$$

花括号之外是包络线, 它决定了 $W(\omega)$ 衰减速度, 花括号内是两个以 $\pm 4\pi/T$ 为频率的振荡函数, 二者合成结果, $W(\omega)$ 仍是以 $4\pi/T$ 频率振荡函数。所以 $W(\omega)$ 总是呈衰减振荡状态, 企图

通过选择窗函数的形式来彻底消除振荡, 也即消除窗谱旁瓣是不可能的。

以上性质是针对连续窗函数的, 实际使用的是离散窗函数。由于离散, 窗谱变成周期函数, 但在基本周期区间上, 特别是主瓣附近, 上述几条性质仍成立。

4 常见几种窗的验证

我们选择了矩形窗、三角窗、汉宁窗和高斯窗加以验证, 下文均考虑了窗的恢复系数。

矩形窗窗谱为 $W(\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$, 它的时域曲线不连续, 积分后连续, 相当负一阶连续, 因而它的衰减速度只有一阶, 具有很高的旁瓣。

三角窗的窗谱为 $W(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4} \right]^2$, 因为时域曲线连续, 一阶导数不连续, 故有两阶的衰减速度。

汉宁窗的窗谱为 $W(\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\omega T/2 + \pi)}{\omega T/2 + \pi} + \frac{\sin(\omega T/2 - \pi)}{\omega T/2 - \pi} \right]$ 因时域曲线具有一阶连续导数, 窗谱具有三阶衰减速度。

图 1 给出三种谱的图形可以看出窗谱 $\omega=0$ 取得最大值, 主瓣宽不小于 $4\pi/T$, 窗谱呈对称衰减震荡, 且三者的衰减速度不同。在双对数图上, 这表现的更明显, 幅值谱包络近似为直线, 对应矩形窗、三角窗和汉宁窗的包络直线斜率分别为 -1, -2 和 -3。

主瓣宽影响了频率分辨率。若视加窗为滤波器, 则窗函数的衰减越大, 主瓣越宽。为了降低主瓣宽, 甚至可构造对称上升的窗函数, 但进一步研究表明分辨率的提高有限, 而旁瓣大大增加, 如 $w(t) = 4|t|/T$ 窗函数的旁瓣高达主瓣的 50%, 特别是上面已经指出主瓣再窄也不会低于 $2\pi/T$, 所以总体来说上升窗不可取。

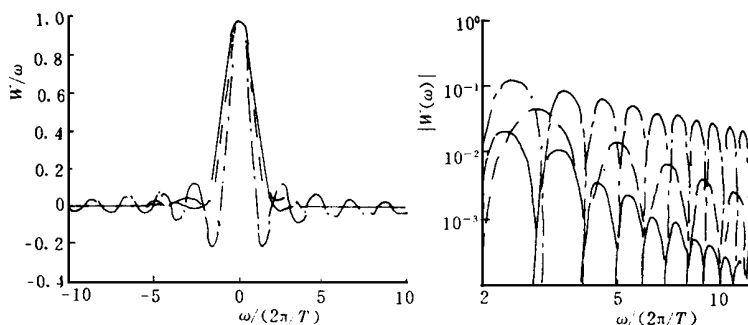


图 1 几种常见窗谱比较

Fig 1 The comparison of some spectrum window s

高斯窗是小波分析的基本工具, 其优良的特性是无穷时间域内, 高斯曲线与其谱是互易的, 因而没有旁瓣。有限区间上的高斯窗谱仍有旁瓣, 但可通过调整高斯窗的衰减程度, 使旁瓣很小, 有些文献中笼统称高斯窗无旁瓣的描述是不确切的。由于有限域高斯窗的两端不连续, 窗谱的衰减速度很慢, 与矩形窗谱的相同。

5 结论与讨论

- 1) 对称的凸形非负窗函数的幅值谱在 $\omega=0$ 处取得最大值。
- 2) 凸形的窗函数的幅值谱主瓣内至少有两条 FFT 谱线, 并且距 $\omega=0$ 的两条谱线分别为最大和次大, 因而可用这一性质确定主瓣的位置。
- 3) 窗函数在两端越光滑, 窗谱的衰减性能越好, 远频的泄漏影响越小。
- 4) 企图通过选择窗函数来消除旁瓣是徒劳的。

5) 提出通过搜索最大值办法可无偏估计单频信号的参数, 对于多频信号以及相隔很近的估计方法, 另文表述。

致谢: 感谢丁康教授对本文的指正。

主 要 参 考 文 献

- 1 余佳兵, 史铁林, 陈培林等. 窗谱校正方法的实用峰值搜寻算法的研究. 振动工程学报, 1996, 9(4): 378 ~ 382
- 2 谢明, 丁康. 频谱分析校正方法. 振动工程学报, 1994, 7(2): 172~ 179
- 3 黄迪山. *FFT* 相位误差分析及实用修正方法. 振动工程学报, 1994, 7(2): 183~ 189
- 4 丁康, 谢明. 离散频谱三点卷积幅值修正法的误差分析. 振动工程学报, 1996, 9(1): 92~ 98
- 5 牛玉广, 陈彭, 宋之平. 整周期采样信号的局部频谱细化. 动态分析与测试技术, 1996(2): 21~ 25
- 6 陈奎孚, 焦群英. 矩形窗频谱的精确校正. 动态分析与测试技术, 1997, (2): 46~ 51
- 7 王飞, 姜兴渭, 董彩凤. 周期性信号测量中的相位误差分析. 数据采集与处理, 1992, 7(3): 171~ 176
- 8 陈奎孚, 焦群英, 高小榕. 谱峰法的窗函数选择. 中国农业大学学报, 1997, 2(4): 21~ 27
- 9 [美]崔锦泰. 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1995. 31~ 32

Amplitude Spectrum Properties of Symetric Windows

Chen Kuifu Zhang Senwen

(China Agricultural University, Beijing)

Gao Xiaorong

(Tsinghua University)

Abstract The amplitude spectrum properties of symmetric windows were explored. First, the spectrum peak at $\omega=0$ is the maximum point, according to this item, the parameter of single frequency signal can be unbiasedly estimated out by searching the signal amplitude spectrum maximum. Second, the main lobe width is greater than $4\pi/T$, hence there are at least 2 FFT spectrum lines in main lobe, and the amplitude of 2 lines nearest to $\omega=0$ get maximum and second maximum, which can be used to determine the searching scope. Third, all the spectrums of the window in finite time domain were damped oscillating, which means that it is impossible to eliminate side lobes completely.

Key words signal process, window function, spectrum analysis