

# 圆球颗粒间有幂律流体时挤压流动的法向粘性力

徐 泳, 黄文彬, 李红艳

(中国农业大学工程基础科学部)

**摘 要:** 为了建立湿颗粒系统的离散元模型, 研究了两刚性圆球颗粒间的幂律流体在挤压流动时产生的法向粘性力, 并导出了任意球颗粒间的压力分布和法向粘性力的积分表达式, 并可证明此粘性力表达式可以退回到牛顿流体情形。与 Rodin 的渐近解的数值比较表明, 该结果在全范围内是光滑连续的合理解, 而 Rodin 的渐近解只是在幂指数大于 163 后才与粘性力积分表达式的解逐渐重合。

**关键词:** 离散元法; 幂律流体; 挤压流动; 粘性力

**中图分类号:** O 158; O 34717

**文献标识码:** A

**文章编号:** 100226819(2002)0220001204

离散元法 (DEM) 是近年来新发展的散体力学数值方法, 可广泛应用于农业、食品、化工和制药等领域。颗粒离散元法把散体简化为大量的球体, 可分为干湿两类作用模型。干颗粒的模型比较成熟<sup>[1]</sup>, 湿颗粒模型又可分为两相流 (DEM 和 CFD 方法的结合) 和密相颗粒充填流体结构, 后者目前只有牛顿流体模型, 且只有很少的研究结果发表<sup>[2,3]</sup>。而在许多过程中充填流体为非牛顿体, 如冰淇淋等食品、未凝结的混凝土、湿土和粘稠泥浆等, 显然牛顿流体模型不足以描述其力学行为。本文研究密相颗粒群在幂律流体中的相互作用, 假定球体变形很小可视为刚性。因离散元法把颗粒作用看成拟静态的, 把每一时步所研究的颗粒的受力看成相邻颗粒在接触点处作用的组合, 故只须研究两球体间的作用, 其中的法向作用属于挤压流动。

挤压流动研究始于 Stefan<sup>[4]</sup> 的两圆盘间牛顿流体挤压, Scott<sup>[5]</sup> 研究了幂律流体下同一问题, Chan 和 Hone<sup>[6]</sup> 研究了圆球和平面间牛顿流体挤压, Adams 和 Edmondson<sup>[7]</sup> 研究了等径球体间幂律流体的挤压, Rodin 等<sup>[8]</sup> 用渐近法得到任意圆球间幂律流体挤压的粘性力解。本文参考相关的研究<sup>[7]</sup>, 基于润滑理论来研究压力分布和法向粘性力。

## 1 挤压流动的基本方程

图 1 所示半径为  $R_1$  和  $R_2$  的两刚性球体沿连心轴以相对速度  $V_z$  缓慢趋近,  $B$  是流体已知参考压力的边界。在图示轴对称坐标系下, 接近的两球表面

$S_1$  和  $S_2$  可近似表达为

$$\begin{cases} z = z_1(r) = s_0 + r^2 \ddot{o}(2R_1) & \text{在 } S_1 \text{ 上} \\ z = z_2(r) = -r^2 \ddot{o}(2R_2) & \text{在 } S_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

式中  $z_1, z_2$  是两球表面坐标,  $s_0$  是最小间隙。球表面上的边界条件为

$$\begin{cases} v_r = 0, v_z = -V_z & \text{当 } z = z_1(r) \\ v_r = 0, v_z = 0 & \text{当 } z = z_2(r) \end{cases} \quad (2)$$

式中  $v_r$  和  $v_z$  分别是径向和垂向速度分量。

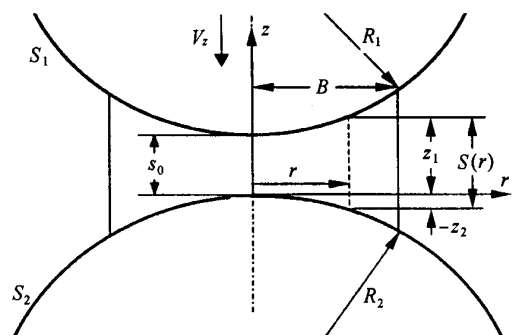


图 1 挤压流动示意图

Fig 1 Schematics of squeeze flow

对缓慢挤压流动惯性力可忽略。根据润滑理论, 假定接触区流体压力  $p$  与  $z$  无关, 即  $dp \ddot{o} dz = 0$ , 动量方程简化为

$$\frac{\partial S_z}{\partial z} = \frac{dp}{dr} \quad (3)$$

式中  $S_z$  ——剪应力分量。

在本文情形下, 不可压流体的连续方程可写为

$$\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rv_z)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

幂律流体的本构关系为

$$S_z = K \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|^n \text{sign} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (5)$$

式中  $K$  ——常系数;  $n$  ——幂指数。

收稿日期: 2001210209

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (批准号 19972075)

作者简介: 徐 泳, 教授, 博士生导师, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 75 信箱, 100083

## 2 压力分布

由边界条件(2), 流体挤压产生上、下球表面处径向速度为零的速度场, 中间必有一曲面层  $z = \bar{z}(r)$ , 其上剪应力分量  $S_z$  为零而径向速度  $v_r$  取极值。故动量方程的积分需分作  $z > \bar{z}$  和  $z < \bar{z}$  两个区域, 对应的剪应力分别有  $S_z < 0$  和  $S_z > 0$ 。故式(5)可写成

$$S_z = \begin{cases} -K \left( -\frac{5v_r}{5z} \right)^n & (z > \bar{z}) \\ K \left( \frac{5v_r}{5z} \right)^n & (z < \bar{z}) \end{cases} \quad (6)$$

设压力以受压(速度  $V_z$  使两球趋近)为正, 显然有  $dp/dr < 0$ 。把动量方程(3)对  $z$  积分两次并考虑到本构关系(6), 可得两个区域的径向速度分布分别为

$$v_r = \begin{cases} -\frac{n}{n+1} \left[ -\frac{1}{K} \frac{dp}{dr} \right]^{1/n} \left[ (z - \bar{z})^{n+1} - (z_1 - \bar{z})^{n+1} \right] & (z > \bar{z}) \\ -\frac{n}{n+1} \left[ -\frac{1}{K} \frac{dp}{dr} \right]^{1/n} \left[ (\bar{z} - z)^{n+1} - (\bar{z} - z_2)^{n+1} \right] & (z < \bar{z}) \end{cases} \quad (7)$$

在  $z = \bar{z}$  处  $v_r$  必连续, 即式(7)中二式同值, 故  $z_1 - \bar{z} = \bar{z} - z_2$ 。由此可得

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (8)$$

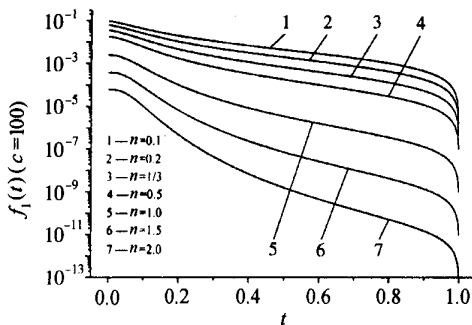
这表明对任意  $r$ , 零剪切面总使上下两部分液膜等厚。此速度场(7)满足边界条件(2)。

将连续方程(4)先对  $r$  积分, 再对  $z$  积分, 利用边界条件可得

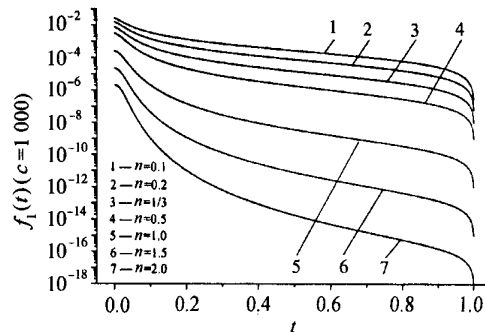
$$\int_{z_2}^{z_1} v_r dz = \frac{1}{2} r V_z \quad (9)$$

将式(7)代入积分可得

$$\frac{dp}{dr} = -2K \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n V_z^n \frac{r^n}{s(r)^{2n+1}} \quad (10)$$



a  $c = 100$



b  $c = 1000$

图2 压力函数  $f_1(t)$  的分布

Fig 2 Distribution of the pressure function  $f_1(t)$

式中  $s(r)$  为接触区液膜厚度,  $s(r) = z_1 - z_2$ 。将式(10)代入(7)可得两区域的径向速度。

设流体在外边界压力  $p(r)_{R=B} = 0$ , 积分(10)可得接触区压力分布为

$$p(r) = \int_B^r \frac{dp}{dr} dr = -2K \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n V_z^n \int_B^r \frac{r^n}{s(r)^{2n+1}} dr \quad (11)$$

其中的积分函数为负值。

为简化表达起见定义等效半径  $R^*$ 。

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \quad (12)$$

注意此处的等效半径是某些文献中所定义的谐调平均半径的2倍。

定义单位量纲参数  $c$

$$c = \frac{B^2}{R^* s_0} \quad (13)$$

参数  $c$  称量纲1积分上限。对浸渍情形由后面讨论可取  $B = R^*$ ; 这时  $c = R^* s_0$  可称间隙比。

令  $t = r/R^*$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 可得接触区压力分布为

$$p(t) = 2K \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n V_z^n \frac{B^{n+1}}{s_0^{2n+1} f_1(t)} \quad (14)$$

式中  $f_1(t)$  ——压力函数。

$$f_1(t) = \int_t^1 \frac{r^n}{(1 + ct^2)^{2n+1}} dt \quad (15)$$

图2a、图2b分别给出当  $c = 100$  和  $c = 1000$  时, 函数  $f_1(t)$  随  $t$  变化的对数曲线。由图可知  $f_1(t)$  接触中心处  $f_1(t)$  即压力最大, 随着  $t$  的增加迅速降低, 说明压力以及它合成的挤压法向力由核心区域控制。二图相比较又可知  $c$  值越大, 函数在核心区域随  $t$  的降低越陡峭。注意虽然  $f_1(t)$  随  $n$  的增大而减小, 实际压力却随  $n$  的增大而增大, 因与压力函数外的量有关。

3 法向挤压力

法向粘性力等于对压力的积分

$$F_n = - \int_0^{2P/B} p(r) r dr$$

式中负号表示对应粘性力以受压为正。将式(11)代入, 由分步积分简化可得粘性力为

$$F_n = 2PK \left[ \frac{2n+1}{n} \right]^n V_z^n \frac{B^{n+3}}{s_0^{2n+1}} f(n, c) \quad (16)$$

其中

$$f(n, c) = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+ct^2)^{2n+1}} dt \quad (17)$$

于是粘性力计算归结为函数  $f(n, c)$  的求值。特别地, 若  $R_1 = R_2 = R$ , 则  $R \cong R$ , 式(16)和文献[7]的粘性力表达式等价。

令  $b = B/R$ ; 则可给出本文定义的量纲 1 法向粘性力  $\bar{F}_n$  为

$$\bar{F}_n = \frac{F_n}{K(R/s_0)^{2-n} V_z^n} = 2P \left[ \frac{2n+1}{n} \right]^n b^{1-3n} c^{2n+1} f(n, c) \quad (18)$$

4 验证与比较

为了验证公式的正确性, 令  $n = 1$ , 则由式(17)得  $f(1, c) = (1+c)^{-2} \ln(1+c)$ , 再取  $B = R$ ;  $L = K$  由式(16)可得

$$F_n = 3PLV_z(R/s_0) \ln(2s_0) \quad (19)$$

此即牛顿流体时的挤压法向力公式。

为了与 Rodin<sup>[8]</sup> 的渐近解比较, 本文的压力和粘性力都按 Rodin 的定义转换。比较证实本文压力解(14)与 Rodin 解等价。Rodin 定义的正交化粘性力分 3 段:  $n < 1/3$  时为小量;  $n = 1/3$  时为某函数值;  $n > 1/3$  时是另一函数, 该函数与本文结果(取  $B = R$ )基本等价。

参考 Rodin 文献的  $E = 10^{-2}$  和  $E = 10^{-4}$  ( $E = s_0/R$ ) 两算例, 图 3 给出本文与 Rodin 解的结果比较, 由图可见当幂指数  $n$  大于  $1/3$  后, 二者逐渐吻合。但本文结果在全范围光滑连续, 不存在 Rodin 渐近解的分段跳跃, 可见此差别系渐近求解中的简化所致。

5 数值分析

积分上限  $B$  的给定需考虑流体实际边界和润滑理论的条件。由压力函数的讨论知, 法向挤压力由核心区域控制, 外围区域对挤压力值影响很小。需要指出的是, 两圆球表面  $S_1$  和  $S_2$  的几何形状近似表达式(1)恰恰在接近的局部区域是比较精确的, 这也与润滑理论的适用条件相符合。我们用数值积分计算了  $c = 100$  时不同幂指数  $n$  下量纲 1 粘性力随

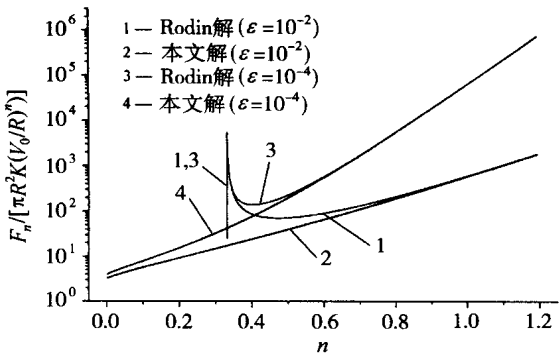


图 3 本文结果与 Rodin 渐近解比较

Fig 3 Comparison between the present work and Rodin's solution

参数  $b$  变化的曲线, 见图 4。由图可知在  $b = 0.12 \sim 0.13$  区段内粘性力随积分限增加急剧增加, 随后迅速趋于水平,  $n$  越大, 剧变区段越短, 计算证实参数  $c$  增加时更明显。  $b > 0.14$  时结果与无界的广义积分无明显区别。对浸渍状态为简单计可取  $b = 1$  或  $B = R$  (此时  $c = R/s_0$ ) 或  $B = \min(R_1, R_2) = R_1$ , 而对简化成柱状的液桥,  $B$  可取液桥半径。

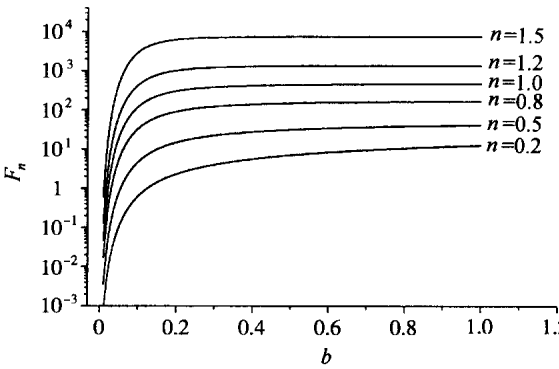


图 4 积分上限对量纲 1 粘性力  $\bar{F}_n$  的影响 ( $c = 100$ )

Fig 4 Effect of integrate upper lim it on dimensionless viscous force

图 5 给出了当  $b = 1$  时不同幂指数  $n$  下量纲 1

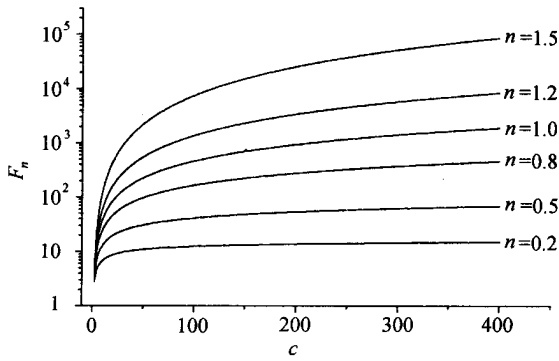


图 5 比值  $c$  对量纲 1 粘性力的影响

Fig 5 Effect of the ratio  $c$  on dimensionless viscous force

粘性力  $\bar{F}_n$  随量纲 1 积分限  $c$  的变化曲线。由图可知对给定的  $n$ , 粘性力随参数  $c$  的增大急剧增加, 因此当  $c$  小时粘性力可忽略不计。

## 6 结 论

本文为湿颗粒系统的离散元计算提供了比 Rodin 渐近解更精确的任意圆球间挤压法向粘性力表达式, 说明量纲 1 积分上限(间隙比)、幂指数和两球相对速度是主要影响因素, 其中间隙比起关键作用, 而积分上限  $B$  对粘性力的影响仅在接触核心区域才显著。此外积分函数  $f(n, c)$  的数值积分算法优劣将极大地影响计算速度, 对离散元法模拟, 需要非常有效的数值积分才能满足要求, 已在另文讨论<sup>[9]</sup>。

致谢: 感谢联合利华(Unilever)研究员练国平博士(Guoping Lian)的大力支持和指导。

### [参 考 文 献]

- [1] 徐 泳, Kofui K D, Thornton C. 用颗粒离散元法模拟料仓卸料过程[J]. 农业工程学报, 1999, 15(3): 65 ~ 69.
- [2] Lian G, Thornton C, Adam s M J. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies[J]. Journal of Colloid and Interface Science,

1993, 161: 138~ 147.

- [3] Thornton C, Lian G, Adam s M J. Modelling of liquid bridges between particles in DEM simulations of moist particle systems [A]. In: Proc 2<sup>nd</sup> Int Conf Discrete Element Methods [C], ed Williams J R & Mustoe G W, 1993. 177~ 187.
- [4] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids [M]. New York: Wiley, 1977. 19 ~ 21.
- [5] Scott J R. Theory and application of the parallel plate viscometer [J]. Trans Inst Rubber Ind, 1931. 7: 169~ 186.
- [6] Chan D Y C, Horn R G. The drainage of thin liquid films between solid surfaces [J]. J Chem Phys, 1985, 83: 5311~ 5324.
- [7] Adam s M J, Edmondson B. Forces between particles in continuous and discrete liquid media [A]. In: Tribology in Particulate Technology [C], ed Briscoe B J & Adam s M J, 1987. 154~ 172.
- [8] Rodin G J. Squeeze film between two spheres in a power-law fluid. J Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1996, 63, 141~ 152.
- [9] 黄文彬, 徐 泳. 球颗粒间幂律流体挤压流动下法向粘性力的高效数值算法 [J]. 中国农业大学学报, 2002, 19 (2): 待排印.

## Viscous Force of Squeeze Flow Between Two Spherical Particles With Power-Law Fluid

Xu Yong, Huang Wenbin, Li Hongyan

(College of Engineering Sciences, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract:** The normal viscous force between two arbitrary rigid spheres with an interstitial power-law fluid was studied in order to establish model for wet granular materials using the Discrete Element Method. As a result, analytical integration form expressions of pressure distribution and the viscous force for two arbitrary spheres were obtained, which behaves smooth, continuous and could be reduced to the Newtonian case. Numerical comparison on the viscous force with Rodin's asymptotic solution shows a general coincidence with each other when the power index exceeds 103.

**Key words:** discrete element method; power-law fluid; squeeze flow; viscous force