第 21 卷 第 8 期
2005 年 8 月

Vol. 21 No. 8
Aug. 2005

利用阻尼最小二乘法求解 Van Genuchten 方程参数

马英杰[1,2], 虎胆·吐马尔拜[2], 沈 冰[1]
(1. 西安理工大学水资源研究所, 西安 710048; 2. 新疆农业大学水利与土木工程学院, 乌鲁木齐 830052)

摘 要: 土壤水分参数对于定量预报非饱和水流运动是非常重要的, 该文运用阻尼最小二乘法, 拟合了描述土壤水分特征曲线的 Van Genuchten 方程参数, 同时与非线性单纯性法拟合结果进行了比较, 结果表明: 该方法拟合精度较高, 可以作为计算 Van Genuchten 方程参数的一种方法。此外, 用 VB 语言编写算法程序, 便于对输入数据进行修改。

关键词: 阻尼最小二乘法; Van Genuchten 方程; 参数
中图分类号: S152.7 **文献标识码**: B **文章编号**: 1002-6819(2005)08-0179-02

马英杰, 虎胆·吐马尔拜, 沈 冰. 利用阻尼最小二乘法求解 Van Genuchten 方程参数[J]. 农业工程学报, 2005, 21(8): 179-180.
Ma Yingjie, Hudan·tumaerba, Shen Bing. Estimating parameters by solving Van Genuchen equation using the damper least square method [J]. Transactions of the CSAE, 2005, 21(8): 179-180. (in Chinese with English abstract)

0 引 言

目前, 描述土壤水分运动曲线的 Van Genuchten 方程, 由于其线型与实测数据曲线相似, 而且参数意义明确, 因而有关研究中常以该方程描述土壤水分变化过程。确定该方程参数的方法通常分为两类: 一类是通过实验方法获取土壤水分参数, 如邵明安(2000)[1]建立了推求非饱和土壤水分运动参数的简单入渗法, 用以推求 Van Genuchten 方程的参数 α 和 n; 另一类是根据获取的土壤含水率和土壤水吸力的实测数据, 利用拟合方法求参数, 如王金生(2000)[2]将最小二乘法和非线性单纯性法结合研究了土壤持水曲线的滞留特征, 徐绍辉[3]将最小二乘法与 Picard 结合拟合砂质黏性土的 Van Genuchten 方程参数, 李春友(2001)[4]运用单纯性调优法, 拟合了 6 种土壤的 Van Genuchten 方程参数。但是, 由于单纯性法的换点规则仅能使其在局部寻优, 因此不是一种很好的算法[6]。本文运用非线性阻尼最小二乘法拟合 Van Genuchten 方程的参数, 同时, 与用非线性单纯性法对拟合参数进行了比较, 结果表明该方法计算精度较高, 且不会出现因方程组出现严重病态而给求解方程组代来严重的困难, 为求解 Van Genuchten 方程参数提供了一种新方法。用 VB 语言将该算法编制成程序, 便于对数据进行修改。

1 Van Genuchten 方程

描述土壤水分运动曲线的 Van Genuchten 方程形式为

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)[1 + |\alpha h|^n]^{-m}$$

式中 θ —— 土壤含水率, $cm^3 \cdot cm^{-3}$; h —— 土壤基质势, cm; θ_s、θ_r —— 土壤饱和含水率和残余含水率, $cm^3 \cdot cm^{-3}$; α、n、m —— 土壤水分曲线参数, $m = 1 - 1/n\,(n > 1)$。

2 算法的构造

对于超定方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_i) = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_j(x_1, x_2, \cdots, x_i) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中 j —— 实测数据的组数; i —— 待求参数的个数, 常常转化为与之等价的目标函数为

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots x_i) = \sum_{a=1}^{j} f_a(x_1, x_2, \cdots x_i)^2 \tag{2}$$

于是, 非线性最小二乘问题可定义为

$$\min \varphi(x) = \min\left(\frac{1}{2} f(x)^T f(x)\right) \tag{3}$$

根据极值的必要条件, 如果 x^* 是式(3)的极小点, 则它必满足方程组

$$\nabla \varphi(x) = 0 \tag{4}$$

求解方程组(4)的阻尼最小二乘法的表达式为

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + P_k \\ P_k = -(Df(x_k)^T Df(x_k) + \mu_k I)^{-1} Df(x_k)^T f(x_k) \end{cases} \tag{5}$$

式中 μ_k —— 阻尼因子; I —— 单位矩阵,

$$f(x_k) = A_k x + b_k \tag{6}$$

式中 A_k —— 待定的 $j \times i$ 阶矩阵; b_k —— j 维向量。

$$Df(x_k)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f_2(x_k)}{\partial \alpha_1}, \cdots, \frac{\partial f_j(x_k)}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial f_2(x_k)}{\partial \alpha_2}, \cdots, \frac{\partial f_j(x_k)}{\partial \alpha_2} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial f_2(x_k)}{\partial \alpha_i}, \cdots, \frac{\partial f_j(x_k)}{\partial \alpha_i} \end{bmatrix} \tag{7}$$

3 计算方法

在编程计算前, 应先求出 $Df(x)$, 设

$$f(x) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)[1 + |\alpha h|^n]^{-[1-(1/n)]} \tag{8}$$

将上式分别对 θ_r、θ_s、α 和 n 求导后得

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_r} = 1 - (1 + (\alpha h)^n)^{-[1-(1/n)]} \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_s} = (1 + (\alpha h)^n)^{-[1-(1/n)]} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = (\theta_s - \theta_r)\left(-1 + \frac{1}{n}\right)(1 + (\alpha h)^n)^{-[2+(1/n)]} h^n n \alpha^{n-1} \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\theta_s - \theta_r)(1 + (\alpha h)^n)^{[-1+(1/n)]}\left(-\frac{1}{n^2} Ln(1 + (\alpha h)^n + \left(-1 + \frac{1}{n}\right)\frac{(\alpha h)^n Ln(\alpha h)}{1 + (\alpha h)^2}\right) \tag{12}$$

由文献[5]中的具体计算方法可以求得 Van Genuchen 方程的参数。

收稿日期: 2004-12-17 修订日期: 2005-06-13
基金项目: 国家自然科学基金项目(50449009), 新疆农业大学水利水电工程重点学科资助
作者简介: 马英杰, 副教授, 博士生, 主要从事土壤水分运动研究。乌鲁木齐 新疆农业大学水利与土木工程学院, 830052。
Email: xj_myj@163.com

4 实 例

本文以文献[2]的实测资料作为本方法的计算原始数据, 并运用VB 语言将上述过程进行了编程计算。同时, 对该算例应用非线性单纯性法也进行了求参计算, 其中阻尼最小二乘法的计算精度 ϵ= 0.0031, 非线性单纯性法的计算精度 ϵ= 0.008。计算结果见表 1, 对吸湿实验的模拟结果见表 2。

表 1 不同方法确定的Van Genuchten 方程参数

Table 1 Van Genuchten equation parameters in different methods

方法	土壤	α/cm^{-1}	θ_r/cm^3·cm^{-3}	θ_s/cm^3·cm^{-3}	n
文献[2]	粉壤土	0.013	0.053	0.363	4.241
阻尼最小二乘法	粉壤土	0.014	0.053	0.363	4.197
非线性单纯性法	粉壤土	0.012	0.055	0.364	4.287

表 2 不同方法 h- θ模拟与试验对比

Table 2 Contrast of test and simulation in different methods

类型		吸力 h/cm								
		5	30	70	100	200	300	500	1000	1300
模拟值	文献[2]	0.363	0.358	0.258	0.156	0.066	0.057	0.054	0.053	0.053
	本文	0.363	0.358	0.260	0.158	0.067	0.057	0.054	0.053	0.053
实验值		0.362	0.340	0.269	0.141	0.082	0.069	0.061	0.056	0.053

通过以上算例表明, 本文描述的运用阻尼最小二乘法求取Van Genuchten 方程参数的方法与文献[2]结果很接近, 具有较好的拟合效果, 可以作为计算Van Genuchten 方程参数的一种新方法。计算时发现, 计算精度 ϵ受 α值的影响较大, 而相对受其它 3 个参数的影响较小, 如 α = 0.01～ 0.016 时, ϵ = 0.17～ 0.07, n = 3.9～ 4.4时, ϵ= 0.067～ 0.048。另外, 所选初值对拟合值有较大影响, 需要实算才能获得较好的结果, 由于是通过VB 编程计算, 因此, 较易得到计算结果。

[参 考 文 献]

[1] 邵明安, 王全九, Robert Horton. 推求土壤水分运动参数的简单入渗法[J]. 土壤学报, 2000, 37(1): 1- 7.

[2] 王金生, 杨志峰, 陈家军, 等. 包气带土壤水分滞留特征研究[J]. 水利学报, 2000, (2): 1- 6.

[3] 徐绍辉, 张家宝. 求土壤水力特征的一种迭代方法[J]. 土壤学报, 2000, 37(2): 271- 274.

[4] 李春友, 等. 利用优化方法求算Van Genuchen 方程参数[J]. 水科学进展, 2001, 12(4): 473- 478.

[5] 王德人. 非线性方程解法与最优化方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979: 236- 252.

[6] 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002: 75- 79.

Estimating parameters by solving Van Genuchen equation using the damper least square method

Ma Yingjie[1,2], Hudan·tumaerba[2], Shen Bing[1]

(1. *Institute of Water Resources, Xi'an University of Technology*, *Xi'an* 710048, *China*;

2. *College of Water Conservancy and Civil Engineering*, *Xinjiang Agricultural University*, *Urumchi*, 830052, *China*)

Abstract: Soil water parameter is important to quantitatively forecast unsaturated water transport. Using damper least square method, Van Genuchten equation parameters of soil water characteristics were fitted. Compared with the simplex evolutionary method, damper least square method had a better fitting precision and was considered as a suitable method to calculate Van Genuchten equation parameters. The algorithm was coded by means of Visual Basic and it was convenient to modify input data.

Key words: damper least square method; Van Genuchten equation; parameter