梯形断面收缩水深的直接计算公式

赵延风[1,2]，王正中[1,2]，芦 琴[1]
（1．西北农林科技大学水利与建筑工程学院，杨凌 712100；
2．西北农林科技大学水工程安全与病害防治研究中心，杨凌 712100）

摘 要：梯形断面渠道是比较常用的断面形式之一，其收缩水深的计算需求解高次隐函数方程，传统的图解法或者试算法计算过程复杂，费时费力且误差较大，针对此种状况欲提出一种直接计算公式。通过引入无量纲水面宽度，对梯形断面收缩水深的基本方程进行恒等变形，得到了快速收敛的迭代公式，在工程常用范围即无量纲收缩水深在[0.01，0.5]范围内，对公式进行了优化计算，取得了合理的迭代初值。从而得到梯形断面收缩水深的直接计算公式。误差分析及实例计算表明，在工程常用范围内，收缩水深的最大相对误差仅为 0.26%，直接计算公式形式简捷、精度高、适用范围广。

关键词：水力学模型，坝，灌渠，直接计算，梯形断面，收缩水深，无量纲水面宽度
doi：10.3969/j.issn.1002-6819.2009.08.005
中图分类号：TV131.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-6819(2009)-8-0024-04

赵延风，王正中，芦 琴．梯形断面收缩水深的直接计算公式[J]．农业工程学报，2009，25(8)：24－27.
Zhao Yanfeng, Wang Zhengzhong, Lu Qin. Formula for direct calculation of contracted depth of channel with trapezoidal section[J]. Transactions of the CSAE, 2009,25(8)：24－27.(in Chinese with English abstract)

0 引 言

近十多年来，在渠道水力计算方面尤其是计算各种断面渠道的临界水深和正常水深方面等取得了丰硕的研究成果[1-12]，但在研究收缩水深尤其是梯形断面收缩水深方面的文献较少，收缩水深计算是一个比较复杂的问题，尤其是梯形断面的收缩水深。当水流沿坝面下泄时，由于势能不断地转换为动能，愈往下游则流速愈大，到达坝趾某断面处，流速最大，水深最小，这个水深最小的断面称为收缩断面，该断面的水深称为收缩水深[13]。收缩断面水深的计算是分析泄水建筑物下游的水流衔接形式、消能设计以及判定水跃位置的关键和前提，在水利水电和灌溉排水工程中经常遇到，收缩水深常用的求解方法就是试算法与图解法[14-15]。1997 年文献[16]中提出了一种迭代计算方法，该法是通过引入无量纲收缩水深参数，对收缩断面的能量方程进行变换，推导出迭代公式，再将该迭代式做适当处理，应用马克劳林级数展开等式一端得到迭代初值，该法的提出无疑是为计算梯形断面收缩水深增添了一种新的计算方法，不足之处是迭代初值计算和迭代公式都比较复杂，且需要迭代 2～4 次才能达到精度要求，计算过程繁琐，精度较低，适用范围较小，这些都给工程设计人员带来不便。在前期研究的基础上，通过引入无量纲水面宽度，对梯形断面收缩水深的基本方程进行恒等变形，推导出收缩水深的迭代公式，并从理论上证明了该迭代式的收敛性，通过对迭代式的优化计算得到迭代初值，以期得到梯形断面收缩水深的初值精度高、计算简便、收敛速度快、适用范围广的直接计算公式，以供工程设计部门参考。

1 收缩水深的基本方程及其迭代公式

收缩水深的基本方程为[13]

$$E_0 = h_c + \frac{Q^2}{2g\varphi^2 A_c^2} \tag{1}$$

式中：E_0——以收缩断面底部为基准面的泄水建筑物上游总水头，m；h_c——收缩断面水深，m；Q——下泄流量，m^3/s；g——重力加速度，通常取 9.81 m/s^2；φ——流速系数；A_c——收缩断面面积，m^2。

为了便于公式推导，在梯形断面渠道中，将对应于收缩水深时水面宽度与梯形渠道底宽的比值定义为无量纲水面宽度，用 λ 表示，$\lambda>1$。

根据无量纲水面宽度的定义可知

$$\lambda = \frac{B}{b} = 1 + 2m\frac{h_c}{b} \tag{2}$$

则

$$h_c = \frac{b}{2m}(\lambda - 1) \tag{3}$$

将式（3）代入梯形断面面积公式中，可得

$$A_c = \frac{b^2}{4m}(\lambda^2 - 1) \tag{4}$$

式中：λ——无量纲水面宽度；B——梯形渠道水面宽度，m；b——梯形渠道底宽，m；m——梯形边坡系数，非等腰梯形可取两边边坡系数的平均值。

将式（3）、（4）代入式（1）中，并整理得

收稿日期：2008-12-01 修订日期：2009-06-01
基金项目：国家“863”高技术研究与发展计划项目（2002AA62Z3191）；陕西省水利科技专项计划项目（2006-01）
作者简介：赵延风（1963－），男，陕西西安人，副研究员，从事水力学研究。杨凌 西北农林科技大学水利与建筑工程学院，712100。
Email: zhyf2009@yahoo.cn

$$\frac{2mE_0}{b}=\lambda-1+\frac{16m^3Q^2}{g\varphi^2b^5}\cdot\frac{1}{(\lambda^2-1)^2} \tag{5}$$

设

$$k=\frac{16m^3Q^2}{g\varphi^2b^5} \tag{6}$$

$$\beta=\frac{2mE_0}{b} \tag{7}$$

将式（6）、（7）代入式（5）中得

$$\beta=\lambda-1+\frac{k}{(\lambda^2-1)^2} \tag{8}$$

由式（8）得迭代方程

$$\lambda=\sqrt{1+\sqrt{\frac{k}{\beta+1-\lambda}}} \tag{9}$$

2　迭代公式的收敛性证明

根据迭代理论[17]，如果方程 $x=\psi(x)$的一个根为 L，则迭代公式 $x_{j+1}=\psi(x_j)$（j=0，1，2……）收敛于 L 的条件是：在 L 的某一邻域｜$x-L$｜＜δ 内（方程的根 L 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径），迭代函数的一阶导数的绝对值小于 1，即｜$\psi'(x)$｜＜1，那么以该邻域内任一点为初值的迭代都收敛于 L。因此，只要证明以上迭代函数的导数绝对值小于 1，就可以证明该迭代函数是收敛的。

由式（8）得

$$k=(\lambda^2-1)^2(\beta+1-\lambda) \tag{10}$$

设

$$\lambda=\psi(\lambda) \tag{11}$$

则

$$\psi(\lambda)=\sqrt{1+\sqrt{\frac{k}{\beta+1-\lambda}}} \tag{12}$$

$$\psi'(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{\frac{k}{\beta+1-\lambda}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{\beta+1-\lambda}}}\cdot\frac{k}{(\beta+1-\lambda)^2}$$

$$=\frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{1}{2(\lambda^2-1)}\cdot\frac{(\lambda^2-1)^2(\beta+1-\lambda)}{(\beta+1-\lambda)^2}$$

$$=\frac{1}{4\lambda}\cdot\frac{\lambda^2-1}{\beta+1-\lambda} \tag{13}$$

因为　$\beta>0$，$\lambda>1$

所以

$$|\psi'(\lambda)|<\frac{1}{4}\cdot(1+\frac{1}{\lambda})<\frac{1}{2} \tag{14}$$

根据迭代理论[17]，迭代式（9）对任意正数均 λ 收敛。

3　收缩水深的直接计算公式及参数 α 初值的确定

3.1　收缩水深的直接计算公式

设参数无量纲收缩水深

$$\alpha=\frac{h_c}{E_0} \tag{15}$$

则由式（3）、（7）、（8）、（15）得

$$k=(\lambda^2-1)^2(\lambda-1)(\frac{1}{\alpha}-1) \tag{16}$$

$$\beta=\frac{\lambda-1}{\alpha} \tag{17}$$

将式（17）代入式（9）并设

$$\varsigma=\sqrt{\frac{k}{\beta}}=\frac{2mq}{\varphi b}\sqrt{\frac{2}{gE_0}} \tag{18}$$

则迭代方程式（9）可变为

$$\lambda=\sqrt{1+\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\alpha_0}}} \tag{19}$$

式中　α_0——α 的初选值；q——单宽流量，即 $q=Q/b$，$m^3/(s\cdot m)$；其他符号意义同前。

式（19）即为收缩水深无量纲水面宽度的直接计算公式，将其代入式（3）中就可得到收缩水深。

3.2　参数 α_0 值的确定

在迭代计算中，其收敛速度不仅与迭代函数有关，而且与迭代初值的选取密切相关，只有合适的迭代函数与合理的迭代初值配合使用，才能达到快速收敛的目的。由式（19）得

$$(\lambda-1)(\lambda-1+2)=\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\alpha}} \tag{20}$$

将式（17）代入式（20）得

$$\alpha\beta(\alpha\beta+2)=\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\alpha}} \tag{21}$$

在 $\alpha\in[0.01,0.5]$范围内，对式（21）进行优化计算，得到式（21）的近似替代方程式

$$\mu\alpha^2+\xi\alpha-1.005=0 \tag{22}$$

其中

$$\mu=\frac{m\varphi E_0^{2.5}}{Q}\sqrt{2g}-0.85=\frac{\beta^2}{\varsigma}-0.85 \tag{23}$$

$$\xi=\frac{\varphi bE_0^{1.5}}{Q}\sqrt{2g}-0.385=\frac{2\beta}{\varsigma}-0.385 \tag{24}$$

解一元二次方程式（22）得参数 α 的初值即 α_0 值

$$\alpha_0=\frac{\sqrt{\xi^2+4.02\mu}-\xi}{2\mu} \tag{25}$$

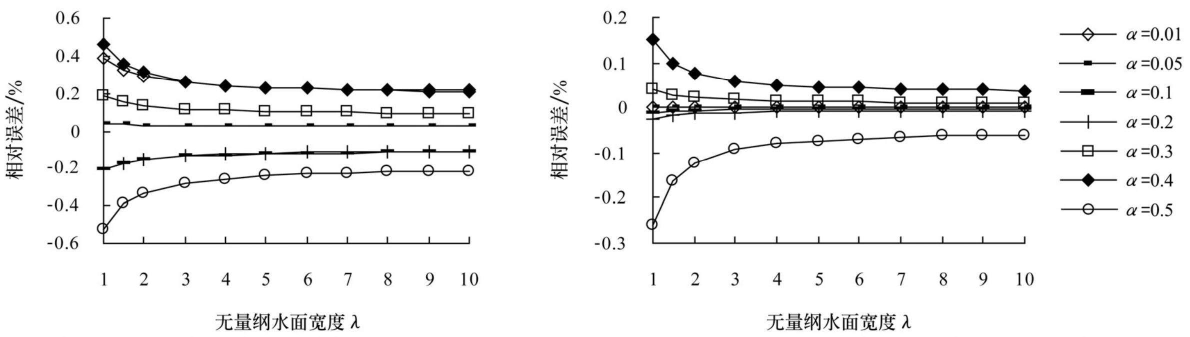
将式（25）代入式（19）得无量纲水面宽度的直接计算公式。

4　计算公式的精度评价

给出无量纲水面宽度 λ=1.01～10，α=0.01～0.5 的值，根据式（16）、（17）、（18）、（19）、（24）、（25）、（3）再反求无量纲水面宽度以及收缩水深的相对误差。为简明起见，本文仅列出误差分析的部分值，结果见图 1，横坐标为无量纲水面宽度 $\lambda=B/b$，纵坐标为收缩水深的相对误差。

由误差计算和图 1a 可以看出，应用初值公式（25）计算收缩水深，在无量纲水面宽度 $\lambda\in$[1.01，10]范围内，收缩水深的最大相对误差＜0.53%，(图 1a 中 α＝0.1、0.2 两线几乎重合)。如果将初选 α 值代入式（19）、（3）中计算，则收缩水深最大相对误差＜0.26%，相对误差分析见图 1b，(图 1b 中 α=0.01、0.05 两线几乎重合)。

经过误差分析，在 $\lambda\in$（10，+∞），$\alpha\in$[0.01,0.5]，用式（25）、（19）、（3）计算收缩水深的相对误差均趋近于 0。



a. 迭代初值误差　　　　b. 迭代一次误差

图 1　收缩水深误差分布图

Fig.1　Distribution of relative error of contracted depth

5　应用举例

以文献[16]为例：已知坝前断面总水头 E_0=10.31 m，通过流量 Q=140 m^3/s。梯形渠道底宽 b=10 m，梯形边坡系数 m=1，流速系数 φ=0.95，求坝下断面收缩水深。

解：求解步骤如下：

由式（7）求得　$\beta=\dfrac{2mE_0}{b}$=2.062

由式（18）求得　$\varsigma=\dfrac{2mq}{\varphi b}\sqrt{\dfrac{2}{gE_0}}$=0.4145

由式（23）求得　$\mu=\dfrac{\beta^2}{\varsigma}-0.85$=9.4087

由式（24）求得　$\xi=\dfrac{2\beta}{\varsigma}-0.385$=9.5652

由公式(25)得 α 的初值(即 α_0 ）$\alpha_0=\dfrac{\sqrt{\xi^2+4.02\mu}-\xi}{2\mu}$ =0.096002。

由式（15）得　$h_c=\alpha_0 E_0$=0.989781 m。

本例收缩水深的精确解[15]为 0.991571 m，用公式（25）求得的收缩水深的相对误差为−0.18%。

为了更准确，可由式（19）得 $\lambda=\sqrt{1+\dfrac{\varsigma}{\sqrt{1-\alpha_0}}}$ = 1.198297。

由式（3）得　$h_c=\dfrac{b}{2m}(\lambda-1)$=0.991485 m。

此时收缩水深的相对误差仅为−0.009%，精度均满足工程要求。

6　结　论

文中通过引入无量纲水面宽度的概念，提出了梯形断面收缩水深的直接计算公式，且进行了误差分析，并结合实例计算给出了梯形断面收缩水深的求解步骤。分析结果表明，本文公式在工程常用范围内均可适用，而且计算精度较高，最大相对误差小于 0.26%，公式形式相对较为简捷，完全满足工程需要，为水利水电工程和农田排溉工程中梯形断面收缩水深的计算提供了一种简便的方法。

［参　考　文　献］

[1] 张宽地，吕宏兴，赵延风．明流条件下圆形隧洞正常水深与临界水深的直接计算[J]．农业工程学报，2009，25(3)：1－5．
Zhang Kuandi, Lü Hongxing, Zhao Yanfeng. Direct calculation for normal depth and critical depth of circular section tunnel under free flow[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering，2009，25(3)：1－5．(in Chinese with English abstract)

[2] 张宽地，吕宏兴，陈俊英．马蹄形过水断面临界水深的直接计算法[J]．农业工程学报，2009，25(4)：15－18．
Zhang Kuandi, Lü Hongxing, Chen Junying. Direct calculation of critical depth of horseshoe section tunnel[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering，2009，25(4)：15－18．(in Chinese with English abstract)

[3] Kanani1 A, Bakhtiari M, Borghei S M, et al. Evolutionary algorithms for the determination of critical depths in conduits [J]. Irrig and Drain Engrg，ASCE，2008，134(6)：847－852．

[4] Swamee P K, Rathie P N. Exact equations for critical depth in trapezoidal canal[J]. Irrig Drain Eng，2005，131(5)：474－476．

[5] 杨克君，曹叔尤，刘兴年．复式河槽正常水深计算方法比较[J]．水科学进展，2005，16(2)：189－195．
Yang Kejun, Cao Shuyou, Liu Xingnian. Comparison of methods predicting normal depth in compound channels[J]. Advances in Water Science，2005，16(2)：189－195．(in Chinese with English abstract)

[6] 王正中，袁驷，武成烈．再论梯形明渠临界水深计算法[J]．水利学报，1999，30(4)：14－16．
Wang Zhengzhong, Yuan Si, Wu Chenglie. A final inquiry on a formula for calculating critical depth of open channel with trapezoidal cross section[J]. Journal of Hydraulic Engineering，1999，30(4)：14－16．(in Chinese with Englishabstract)

[7] Prabhata K S, Wu S, Katopodis C. Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel[J]. Hydr Engrg，1999，125(7)：785－786．

[8] Wang Zhengzhong. Formula for calculating critical depth of

trapezoidal open channel[J]. Hydr Eng，ASCE，1998，124(1)：90－92．

[9] 马吉明，梁海波，梁元博，等．城门洞形及马蹄形过水隧洞的临界水流[J]．清华大学学报:自然科学版，1999，39(11)：32－34.
Ma Jiming, Liang Haibo, Liang Yuanbo, et al. Critical flow in city-gate and horseshoe conduit[J]. Tsinghua Univ: Sci and Tech，1999，39(11)：32－34. (in Chinese with English abstract)

[10] 郝树棠．梯形渠道临界水深的计算及探讨[J]．水利学报，1994，(8)：48－52．
Hao Shutang. Calculation and discussion of critical depth for ladder-canal[J]. Journal of Hydraulic Engineering，1994，(8)：48－52．(in Chinese with English abstract)

[11] 赵延风，祝晗英，王正中，等．梯形明渠正常水深的直接计算方法[J]．西北农林科技大学学报：自然科学版，2009，37(4)：220－224．
Zhao Yanfeng, Zhu Hanying, Wang Zhengzhong, et al. Direct calculation method for the normal depth of an open trapezoidal channel[J]. Journal of Northwest A & F University: Natural Science Edition，2009，37(4)：220－224．(in Chinese with English abstract)

[12] 赵延风，王正中，张宽地．梯形明渠临界水深的直接计算方法[J]．山东大学学报：工学版，2007，37(6)：99－105．
Zhao Yanfeng, Wang Zhengzhong, Zhang Kuandi. Direct calculation method for the critical depth of an open trapezoidal channel[J]. Journal of Shandong University: Engineering Science，2007，37(6)：99－105. (in Chinese with English abstract)

[13] 清华大学主编．水力学（修订本）上册[M]．北京：高等教育出版社，1980．
Tsinghua University. Hydraulics[M]. Beijing: Higher Education Press，1980．(in Chinese)

[14] 赵延风，王正中，孟秦倩．矩形断面收缩水深的直接计算方法[J]．人民长江，2008，39(8)：102－103．

[15] 赵延风，王正中，许景辉，等．Matlab 语言在梯形明渠水力计算中的应用[J]．节水灌溉，2008，(4)：38－40．
Zhao Yanfeng, Wang Zhengzhong, Xu Jinghui, et al. Application of Matlab language in hydraulic calculation of open trapezoidal channel[J]. Water Saving Irrigation，2008，(4)：38－40．(in Chinese with English abstract)

[16] 王正中，雷天朝，宋松柏，等．梯形断面收缩水深计算的迭代法[J]．长江科学院院报，1997，14(3)：15－18．
Wang Zhengzhong, Lei Tianchao, Song Songbai, et al. An iterative method calculating water depth at vena contraction in trapezoidal cross section[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute，1997，14(3)：15－18．(in Chinese with English abstract)

[17] 关治，陈景良．数值计算方法[M]．北京：清华大学出版社，1990．
Guan Zhi, Chen Jingliang. Value Computational Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press，1990．(in Chinese)

Formula for direct calculation of contracted depth of channel with trapezoidal section

Zhao Yanfeng[1,2], Wang Zhengzhong[1,2], Lu Qin[1]

(1.*College of Water Resources and Architectural Engineering*, *Northwest Agriculture and Forestry University*, *Yangling* 712100, *China*;
2. *Reseach Center of Water Engineering Safety and Disaster Prevention*, *Northwest Agriculture and Forestry University*, *Yangling* 712100, *China*)

Abstract: The channel with trapezoidal section is used commonly in practical engineering. To get the contracted depth in the section, high order implicit equation need to be solved. Conventional methods, such as graphic approach and trial calculation method, are complex, inefficient and with large error. So a direct calculation formula with simple form, high efficiency and high precision, is presented in the current work. By introducing a non-dimensional width of water surface, an iterative formula with high efficiency for calculating contracted depth is obtained by identical transformation of the fundamental equation of contracted depth. The reasonable iterative initial value is also given by optimizing the formula form. The non-dimensional contracted depth ranges from 0.01 to 0.5, which satisfies the requirement of practical engineering. Finally, the direct formula for calculating the contracted depth is obtained. Error analysis and a practical engineering example are given to show the advantages of the current direct calculation formula.

Key words: hydraulic models, dams, irrigation canals, direct calculations, trapezoidal section, contracted depth, non-dimensional surface width