

U形渠道正常水深的直接水力计算公式

张新燕, 吕宏兴*, 朱德兰

(西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 杨凌 712100)

摘要: 针对水力性能优良的U形渠道, 依据明渠均匀流基本原理, 以过水断面水深恰好等于U形底弧弓高时断面过流量作为分界流量 Q_b , 引入断面特征参数和无量纲相对正常水深, 采用麦考特优化法, 以离差平方和最小为目标, 利用SAS软件编程, 通过最优化拟合建立了U形渠道正常水深直接水力计算公式。通过误差分析表明, 所建公式在渠道过流量 Q 小于分界流量 Q_b 时, 计算相对误差绝对值均小于0.44%; 渠道过流量 Q 大于分界流量 Q_b 时, 计算相对误差绝对值均不超过1%, 可见公式具有较高的精度, 且物理概念清晰、计算方便快捷; 该公式不仅可用于解决宽浅式渠道正常水深水力计算, 也适用于窄深式渠道正常水深的水力计算, 具有较强的通用性, 可为渠道工程设计和运行管理提供理论依据和有益参考。

关键词: 水力学, 设计, 计算, 正常水深, 麦考特优化法, U形渠道

doi: 10.3969/j.issn.1002-6819.2013.14.015

中图分类号: TV131.4

文献标志码: A

文章编号: 1002-6819(2013)-14-0115-05

张新燕, 吕宏兴, 朱德兰. U形渠道正常水深的直接水力计算公式[J]. 农业工程学报, 2013, 29(14): 115—119.
Zhang Xinyan, Lü Hongxing, Zhu Delan. Direct calculation formula for normal depth of U-shaped channel[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE), 2013, 29(14): 115—119. (in Chinese with English abstract)

0 引言

明渠均匀流正常水深是关系渠道设计、运行管理的重要水力要素, 而其水力计算公式均为复杂的隐函数, 不能直接求解, 传统解法一般有试算法、图解法、迭代法等, 试算法费时费力且误差大, 精度不易控制, 图解法易出现读图和内插误差, 不便于在生产实践中应用推广, 而迭代法虽可控制精度和误差, 但受迭代格式和迭代初值影响, 常会造成不收敛或迭代次数较多等后果。因此国内外针对渠道正常水深的求解进行了大量研究, 马蹄形断面、城门洞形断面、圆形断面、抛物线形断面、蛋形断面正常水深的计算均获得了一定的研究成果^[1-9]。U形渠道结构受力均匀, 有利于耐冻胀破坏和抵抗水压力, 且输水能力大, 近年来在生产中得到广泛应用。因此如何方便快捷地计算出较高精度的U形渠道正常水深具有重要意义, 而到目前为止还没有一套通用的直接求解其正常水深的计算公式。李凤玲等应用拟合的方法分别得出了窄深式U形渠道和宽浅式U形渠道正常水

深的近似计算公式^[10-11], 计算中涉及矩阵, 形式复杂, 且通用性差。基于此, 本文拟根据明渠均匀流基本方程, 采用麦考特法最优化拟合, 提出一套U形渠道正常水深直接水力计算公式, 以期为渠道工程设计和运行管理提供可靠的理论依据和有益参考。

1 明渠均匀流基本方程

明渠均匀流水流运动规律是明渠水力计算的基本依据, 工程实践中, 明渠均匀流理论不仅是渠道设计的重要依据, 也是渠道运行管理的基础。其基本方程为

$$Q = \frac{\sqrt{i}}{n} \cdot \frac{A^{5/3}}{WP^{2/3}} \quad (1)$$

式中, Q 为流量, m^3/s ; A 为过水断面面积, m^2 ; WP 为湿周, m ; i 为渠道底坡; n 为粗糙系数。

1.1 U形渠道过水断面水力要素

图1所示为一U形渠道断面, 由于过水断面分别由底部圆弧段和上部直线段两部分构成, 故水力要素公式为随水深变化的分段函数, 过水断面面积和湿周可表示为,

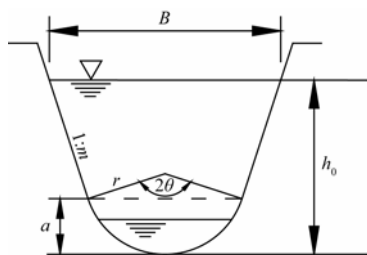
$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } h_0 < a \text{ 时,} \\ &A = r^2 \arccos\left(1 - \frac{h_0}{r}\right) - (r - h_0) \sqrt{r^2 - (r - h_0)^2} \\ &WP = 2r \arccos\left(1 - \frac{h_0}{r}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

收稿日期: 2013-04-08 修订日期: 2013-06-28

基金项目: “十二五”国家科技支撑计划(2011BAD29B00); 西北农林科技大学基本科研业务费专项资金项目(QN2011131)

作者简介: 张新燕(1972—), 女, 河南开封人, 副教授, 博士, 主要从事灌溉水力学研究工作。杨凌 西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 712100。Email: xnzxy@163.com

※通信作者: 吕宏兴(1955—), 男, 陕西陇县人, 教授, 博士生导师, 主要从事水力学及河流动力学的教学与研究工作。杨凌 西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 712100。Email: lvhongxing@tom.com



注: h_0 为正常水深, m; r 为底弧半径, m; a 为底弧弓形高, m; 2θ 为底弧圆心角, rad; m 为侧墙直线段边坡系数; B 为水面宽, m。

Note: h_0 is normal depth, m; r is bottom arc radius, m; a is height of bottom arc, m; 2θ is central angle of section bottom arc, rad; m is side slope coefficient of sidewall line segment; B is width of the canal at the water surface, m.

图 1 U 形渠道过水断面

Fig.1 Cross section of U-shaped channel

当 $h_0 > a$ 时,

$$\left. \begin{aligned} A &= (h_0 - a) \left[\frac{2r}{\sqrt{1+m^2}} + (h_0 - a)m \right] + r^2 \left(\theta - \frac{m}{1+m^2} \right) \\ WP &= 2 \left[r\theta + (h_0 - a)\sqrt{1+m^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{2^{0.4}}{r^{1.6}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{0.6} = \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \left(h_0/r + \sqrt{\frac{m}{1+m^2} - 1} \right)}{\left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \sqrt{1+m^2} \left(h_0/r + \sqrt{\frac{m}{1+m^2} - 1} \right) \right]^{0.4}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + m \left(h_0/r + \sqrt{\frac{m}{1+m^2} - 1} \right) \right] \quad (5)$$

上式 (4)、式 (5) 即为 U 形渠道正常水深 h_0 水力计算公式, 为复杂的隐函数形式, 不能直接求解。

2 U 形渠道正常水深计算

2.1 分界流量

由于 U 形渠道水力要素计算公式随水深变化, 在利用均匀流基本公式 (4)、式 (5) 计算正常水深 h_0 时需根据通过流量 Q 判断过水断面水深位置。具体以过水断面水深恰好等于底弧弓高时断面过流量作为分界流量 Q_b , 即,

$$Q_b = \frac{\sqrt{i}}{n} \left[\frac{r^8 \left(\arcsin \left(\frac{1}{1+m^2} \right) - \frac{m}{1+m^2} \right)^5}{4 \arcsin \left(\frac{1}{1+m^2} \right)^2} \right]^{1/3} \quad (6)$$

以上两式均为包含反三角函数的超越方程, 不存在解析解。

当 $0 < Q \leq Q_b$ 时, $h_0 \leq a = r(1 - \cos\theta)$, 断面底弧圆心角取值 $\theta \in (0, \pi]$, 所以 $\eta \in (0, 1]$ 。将 η 取值范围代入式 (7) 可得 ε 的取值范围为 $\varepsilon \in (0, 1.31]$ 。U 形渠道侧墙直线段边坡系数 $0 \leq m \leq 4$, $m=0$ 时渠道上部

其中, $a = r(1 - \cos\theta)$ 。

式中, h_0 为正常水深, m; r 为底弧半径, m; a 为底弧弓高, m; 2θ 为底弧圆心角, rad; m 为侧墙直线段边坡系数; B 为水面宽, m。

1.2 U 形渠道均匀流基本公式

将式 (2)、式 (3) 分别代入均匀流基本方程 (1) 得 U 形渠道均匀流基本公式。

当 $h_0 < a$ 时,

$$\frac{2^{0.4}}{r^{1.6}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{0.6} = \frac{\arccos(1 - h_0/r) - (1 - h_0/r)\sqrt{1 - (1 - h_0/r)^2}}{[\arccos(1 - h_0/r)]^{0.4}} \quad (4)$$

当 $h_0 > a$ 时,

当实际过流量小于分界流量时, 水深小于底弧弓高, 当实际过流量大于分界流量时, 水深则大于底弧弓高。

2.2 U 形渠道正常水深计算公式

U 形渠道均匀流基本公式 (4)、式 (5) 均为关于 h_0 的复杂隐函数, 无法直接求解。公式左端为反映过水断面特性的特征参数, 令

$$\varepsilon = 2^{0.4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{0.6} / r^{1.6}, \quad \text{同时引入无量纲相对正常水深 } \eta = \frac{h_0}{r}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}。 \text{ 将其代入公式 (4)、式 (5) 整理得,}$$

当 $0 < Q < Q_b$ 时, $0 < h_0 \leq a$,

$$\varepsilon = \frac{\arccos(1 - \eta) - (1 - \eta)\sqrt{1 - (1 - \eta)^2}}{[\arccos(1 - \eta)]^{0.4}} \quad (7)$$

当 $Q > Q_b$ 时, $h_0 > a$

$$\varepsilon = \frac{\arcsin \lambda + (\eta + \sqrt{1 - \lambda^2} - 1) \left[\lambda + \sqrt{1/\lambda^2 - 1} (\eta + \sqrt{1 - \lambda^2} - 1) \right]}{[\arcsin \lambda + 1/\lambda (\eta + \sqrt{1 - \lambda^2} - 1)]^{0.4}} \quad (8)$$

为矩形, $\lambda=1$; $m \neq 0$ 时 $\lambda \neq 1$ 。当 $Q > Q_b$ 时, $h_0 > a = r(1 - \cos\theta)$, 故, $\eta = \frac{h_0}{r} > 1 - \cos\theta = 1 - \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ 。

将 λ 、 η 值代入式 (8) 可得 $\varepsilon \in [1.31, 830.16]$ 。

对式 (7)、式 (8) 采用 SAS 软件中的非线性回归 (NLIN 过程), 给出一系列非线性模型, 并

设定对应的模型参数, 以离差平方和最小为目标, 利用 Marquardt 法通过最优化拟合得出断面特征水深 η 的直接计算公式

$$\eta = -0.0019 + 0.12\varepsilon^{0.5} + 1.08\varepsilon - 1.172\varepsilon^{1.5} + 1.356\varepsilon^2 - 0.859\varepsilon^{2.5} + 0.251\varepsilon^3 \quad (9)$$

$$\varepsilon \in (0, 1.31]$$

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0.413 + 0.349\varepsilon^{1.5} + 0.039\varepsilon^2 & \lambda &= 1 \\ \eta &= e^{-0.3664+0.6265\ln\varepsilon+0.898\lambda^{1.5}-0.0635/\lambda} & \lambda &\neq 1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\varepsilon \in [1.31, 830.16]$$

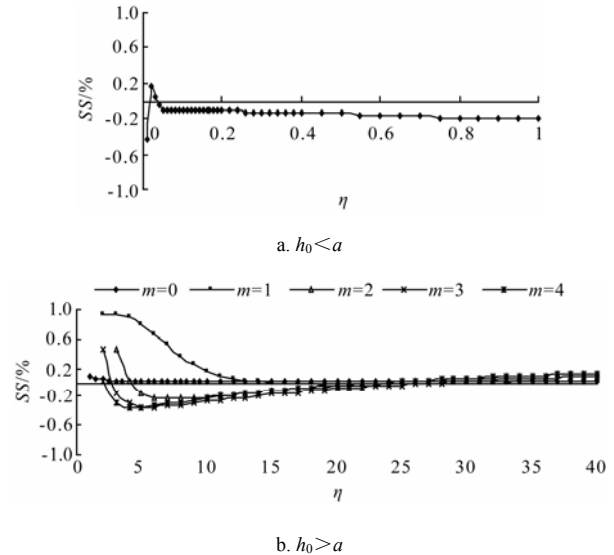
由此, 即可算出正常水深 $h_0=r\eta$ 。

3 计算公式精度评价

为了验证建立的直接计算公式 (9)、式 (10) 的精准度, 以考察其可信性和实用性, 现对两式通过误差分析进行精度评价。首先依据渠道断面水力要素确定出分界流量 Q_b , 利用渠道实际过流量与分界流量相比较, 实际过流量小于分界流量, 水深没有超过底弧弓高, 选用公式 (9) 进行计算; 当实际过流量大于分界流量时, 选用公式 (10) 计算。然后在 λ 、 η 取值范围内任取一系列真实值, 利用相应公式 (7) 或 (8) 算出 ε 值。再将 λ 和算出的 ε 值代入对应的公式 (9) 或 (10) 得出 η 计算值。利用 η 计算值与前述所给定的 η 一系列真实值计算相对误差, 若 η 给定的真实值用 η^* 表示, 则相对误差为, $SS=(\eta-\eta^*)/\eta^* \times 100\%$, 计算结果如图 2 所示。

由图 2 可知, 所建 U 形渠道正常水深直接计算公式 (9)、式 (10) 在工程使用范围内相对误差绝对值均小于 1%, 在 $h_0 \leq a$ 时, 相对误差绝对值均小于 0.44%, 在 $h_0 > a$ 时, 当 $m=0$, 拟合相对误差均小于 0.08%, 当 $m \neq 0$ 时, 误差增大, 尤其在相对

正常水深 η 较小时, 误差较大, 由图可见, $\eta < 9$ 时, 相对误差绝对值均大于 0.2%, 但其均不超过 1%, 可见公式具有较高精度, 且公式形式简洁, 物理概念清晰, 通用性强, 提高了工程设计的便捷性和精准度。



注: h_0 为正常水深, m ; a 为底弧弓高, m ; SS 为相对误差, %; η 为无量纲相对正常水深。

图 2 相对误差分布

Fig.2 Distribution of relative error

4 应用实例

已知某 U 形渠道糙率 n 和底坡 i 分别为 0.025 和 5.0×10^{-4} , 底弧半径 r 为 0.6 m, 求: 1) 侧墙直线段边坡系数 m 为 0, 渠中通过流量 $Q_1=0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ 和 $Q_2=2 \text{ m}^3/\text{s}$ 时的正常水深; 2) 侧墙直线段边坡系数 m 为 3, 通过流量 $Q_3=60 \text{ m}^3/\text{s}$ 时的正常水深。

1) 由所给定的已知水力要素 m 、 n 、 i 、 r 代入公式 (6) 得分界流量 Q_b ,

$$Q_b = \frac{\sqrt{i}}{n} \left[r^5 \left(\arcsin\left(\frac{1}{1+m^2}\right) - \frac{m}{1+m^2} \right) / 4 \arcsin\left(\frac{1}{1+m^2}\right) \right]^{1/3} = 0.227 \text{ m}^3/\text{s}$$

通过流量 $Q_1=0.01 \text{ m}^3/\text{s}$, 由于 $Q_1 < Q_b$, 故选用公式 (9) 进行计算, 得

$$\eta = -0.0019 + 0.12\varepsilon^{0.5} + 1.08\varepsilon - 1.172\varepsilon^{1.5} + 1.356\varepsilon^2 - 0.859\varepsilon^{2.5} + 0.251\varepsilon^3 = 0.2051$$

$$\text{其中, } \varepsilon = 2^{0.4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{0.6} / r^{1.6} = 0.2016$$

可得, $h_0 = r\eta = 0.6 \times 0.2051 = 0.1230 \text{ m}$

实际水深为 0.1231 m, 计算相对误差为 -0.035%。

通过流量 $Q_1=2 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 由于 $Q_2 > Q_b$, $m=0$, 故选用公式 (10) 中的第一式进行计算, 得

$$\eta = 0.413 + 0.349\varepsilon^{1.5} + 0.039\varepsilon^2 = 5.0445$$

$$\text{其中, } \varepsilon = 2^{0.4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{0.6} / r^{1.6} = 4.8424$$

故, $h_0 = r\eta = 0.6 \times 5.0445 = 3.0267 \text{ m}$

实际水深为 3.027 m, 计算相对误差为 -0.0097%。

2) 同理, 由所给定的已知水力要素 m 、 n 、 i 、 r 代入公式 (6) 得分界流量 Q_b ,

$$Q_b = 0.00052 \text{ m}^3/\text{s}$$

由于 $Q_3 > Q_b$, 故选用公式 (10) 中的第二式进行计算, 得

$$\eta = e^{-0.3664+0.6265\ln\varepsilon+0.898\lambda^{1.5}-0.0635/\lambda} = 6.3388$$

其中, $\varepsilon = 37.2678$, $\lambda = 0.316$

故, $h_0 = r\eta = 0.6 \times 6.3388 = 3.8033 \text{ m}$

实际水深为 3.83 m, 计算相对误差为 -0.7018%。

可见本文所建 U 形渠道正常水深直接水力计算公式精准度高, 计算方便快捷, 且具有较强的通用性。

5 结 论

随着 U 形渠道的逐年普及推广应用, 水力计算日益重要。针对均匀流正常水深不能直接求解, 现有近似计算公式繁琐, 不具通用性的问题, 本文根据明渠均匀流基本原理, 采用 SAS 软件中的非线性回归过程 (NLIN 过程), 给出非线性模型, 同时设定模型参数, 以离差平方和最小为目标, 利用麦考特法通过最优化拟合建立了 U 形渠道正常水深直接水力计算公式, 通过误差分析, 得出:

1) 所建公式不仅可用于直接求解宽浅式 U 形渠道, 也可用于求解窄深式渠道形式, 具有较强的通用性, 适用范围广。

2) 所建 U 形渠道正常水深直接计算公式在工程使用范围内相对误差绝对值均小于 1%, 在 $h_0 \leq a$ 时, 相对误差绝对值均小于 0.44%, 在 $h_0 > a$ 时, 当 $m=0$, 拟合相对误差均小于 0.08%, 当 $m \neq 0$ 时, 误差增大, 但均不超过 1%, 公式具有较高精度, 提高了工程设计的便捷性和精准度, 为 U 形渠道水力计算提供了一条有效途径。

3) 公式形式简洁, 物理概念清晰, 计算方便快捷。只要依据渠道断面水力要素确定分界流量 Q_b , 根据渠道过流量与分界流量比较, 选用相应计算公式直接计算即可, 避免了间接计算的繁复和对工具的依赖。

4) 当 $m \neq 0$ 时, 所建公式的计算误差增大, 尤其在相对正常水深 η 较小时, 误差相对较大, $\eta < 9$ 时, 相对误差绝对值均大于 0.2%, 在以后的研究中还需对其进行进一步的优化改进。

[参 考 文 献]

- [1] Vatankhaha Ali R, Said M Easa. Explicit solutions for critica and normal depths in channels with different shapes[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2011, 22: 43—49.
- [2] 张宽地, 王光谦, 吕宏兴, 等. 基于改进粒子群算法求解马蹄形断面正常水深[J]. 排灌机械工程学报, 2011, 29(1): 54—60.
Zhang Kuandi, Wang Guangqian, Lü Hongxing, et al. Applying particle swarm optimization algorithm on normal depth calculation of horse-shoe section tunnel[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2011, 29(1): 54—60. (in Chinese with English abstract)
- [3] Valiani A, Caleffi V. Analytical findings for power law cross-sections: Uniform flow depth[J]. Advances in Water Resources, 2009, 32: 1404—1412.
- [4] 张宽地, 吕宏兴, 王光谦, 等. 普通城门洞形隧洞正常水深的直接计算方法[J]. 农业工程学报, 2009, 25(11): 8—12.
Zhang Kuandi, LüHongxing, Wang Guangqian, et al. Direct calculation method for normal depth of arched section tunnel[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE), 2009, 25(11): 8—12. (in Chinese with English abstract)
- [5] Bijankhan M, Kouchakzadeh S. Egg-shaped cross section: Uniform flow direct solution and stability identification[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2011, 22: 511—516.
- [6] 张新燕, 吕宏兴. 抛物线形断面渠道正常水深的显式计算[J]. 农业工程学报, 2012, 28(21): 121—125.
Zhang Xinyan, Lü Hongxing. Explicit solution for normal depth in parabolic-shape channel[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE), 2012, 28(21): 121—125. (in Chinese with English abstract)
- [7] 赵延风, 王正中, 方兴, 等. 半立方抛物线形渠道正常水深算法[J]. 排灌机械工程学报, 2011, 29(3): 241—245.
Zhao Yanfeng, Wang Zhengzhong, Fang Xing, et al. Calculation method for normal depth of semi-cubic parabolic channels[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2011, 29(3): 241—245. (in Chinese with English abstract)
- [8] Swamee Prabhata K, Rathie Pushpa N. Exact solutions for normal depth problem[J]. Journal of Hydraulic Research, 2004, 42(5): 541—547.
- [9] Rajkumar V Raikar, M S Shiva Reddy, G K Vishwanadh. Normal and critical depth computations for egg-shaped conduit sections[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2010, 21: 367—372.
- [10] 李凤玲, 文辉, 黄寿生. 窄深式 U 形渠道正常水深的近似计算公式[J]. 人民黄河, 2006, 28(12): 75—76.
Li Fengling, Wen Hui, Huang Shousheng. Approximate method calculating normal depth of narrow-deep U-shaped channel[J]. Yellow River, 2006, 28(12): 75—76. (in Chinese with English abstract)
- [11] 李凤玲, 文辉, 欧军利, 等. 宽浅式 U 形渠道正常水深的近似计算公式[J]. 人民长江, 2007, 38(8): 170—171.
Li Fengling, Wen Hui, Ou Junli. Approximate method calculating normal depth of wide-steep U-shaped channel[J]. Yangtze River, 2007, 38(8): 170—171. (in Chinese with English abstract)

Direct calculation formula for normal depth of U-shaped channel

Zhang Xinyan, Lü Hongxing^{*}, Zhu Delan

(College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest Agriculture and Forestry University,
Yangling 712100, China)

Abstract: The normal depth is an important hydraulic element for channel design, operation and management. U-shaped channel has excellent hydraulic performance and strong ability of anti-frost heave, while the normal depth in the governing equations of the current common methods is implicit and have no analytical solutions. We introduced cross section characteristic parameter and dimensionless relative normal depth and took the actual flow rate in channel as the transitional flow rate when the flow depth is exactly equal to the bottom arc height. The direct calculation formula for the normal depth in U-shaped channel was presented by Marquardt method based on the NLIN procedure using SAS software. Marquardt method was used to assess whether the fitting formula reaches the best fitting result by using the iterative program to calculate the residual sum of squares. Fitting formula is the best one when the minimum residual sum of squares exists, having the characteristics of well adaptable to formula, low requirement to iterative initial value and easy to convergence, etc. This method is an effective one to solve the question of fitting non-linear equation and one of the most popular method in the field of solving non-linear equation at present. The error analysis showed the absolute value of the relative error for the proposed formula was smaller than 0.44% when the actual flow rate in channel was smaller than the transitional flow rate. Though the relative error increases when the actual flow rate in channel was larger than the transitional flow rate, the absolute value of relative error was less than 1% in which the relative error less than 0.08% when the slope coefficient was zero, and the error increased when the slope coefficient was not equal zero, but the absolute error was below 1%. It was thus indicated that the proposed formula had high precise and satisfied the need of Engineering practice. In addition, the proposed formula, with the simple form and the clear physical concept, exhibit both simplicity, easy-to-use and strong generality because it can be used to solve the normal depth of wide-shallow channel and the narrow-deep channel. Therefore, the efficient computational tools presented in this paper will be useful in the design and management of channel.

Key words: hydraulics, design, calculation, normal depth, Marquardt method, U-shaped channel

(责任编辑: 曾懿婷)