

基于旋量理论和 Sylvester 结式法的 6 自由度机器人逆运动学求解分析

李盛前, 谢小鹏^{*}

(华南理工大学机械与汽车工程学院, 广州 510641)

摘要: 针对传统 Denavit-Hartenberg (D-H) 参数法进行机器人运动学建模存在的复杂性、奇异性以及逆运动学求解困难等问题, 该文基于旋量理论建立了多自由度串联机器人的矩阵指数积 (product-of-exponentials, POE) 运动学模型, 而同时旋量理论机器人逆运动学求解问题归结为高维非线性方程组的求解, 于是引入希尔维斯特 (Sylvester) 结式法进行逆运动学方程组求解, 并在数学符号化运算 Maple 软件实现了逆解算法过程, 最后通过实例计算表明, 该逆运动学模型及求解方法高效准确可靠, 物理和数学意义明确, 实用性强, 能够推广到其他构型机器人的运动学建模以及逆运动学的求解, 为机器人逆运动学的快速求解提供了参考。

关键词: 机器人; 运动学; 模型; 旋量理论

doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.2015.20.007

中图分类号: TP242

文献标识码: A

文章编号: 1002-6819(2015)-20-0048-07

李盛前, 谢小鹏. 基于旋量理论和 Sylvester 结式法的 6 自由度机器人逆运动学求解分析[J]. 农业工程学报, 2015, 31 (20): 48—54. doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.2015.20.007 <http://www.tcsae.org>

Li Shengqian, Xie Xiaopeng. Analysis of inverse kinematic solution for 6R robot based on screw theory and Sylvester resultant[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE), 2015, 31(20): 48—54.

(in Chinese with English abstract) doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.2015.20.007 <http://www.tcsae.org>

0 引言

机器人运动学是机器人轨迹规划和运动控制的基础, 其包括正运动学和逆运动学, 正运动学就是根据各个关节转角, 计算出机器人末端对应的位姿, 正运动学是唯一解, 即一对一的情况; 而对于期望的机器人末端位姿, 反向求解对应的各个关节转角称为逆运动学, 逆运动学求解得到的各个关节转角并不是唯一组合解, 而是一对多的情况。而从工程应用问题出发, 逆运动学更具有实用价值意义, 但机器人运动学逆解问题比较繁琐难解, 曾被喻为机构运动学分析中的“珠穆朗玛峰”^[1]。

现多数学者主要集中对机器人运动学逆解算法问题的研究, 以往建立机器人运动学模型普遍采用 Denavit-Hartenberg (D-H) 参数法^[2-3], 其建模时需在每个关节都建立坐标系, 坐标系的姿态根据各关节的运动方式不同而有所区别, 并且机器人构型改变时, 需重新建立新的坐标系, 于是 D-H 法建立坐标系的过程较复杂, 效率低, 无通用性, 且几何意义不明确, 因此寻找数学工具替代 D-H 法建模成为必然趋势^[4]。

基于旋量理论的运动旋量指数积^[5-6] (product of exponential, POE) 形式作为机器人运动学建模的一种新方法, 而矩阵指数形式 (POE) 与 D-H 法不同, 其只需

建立基坐标系 (S) 和末端工具坐标系 (T), 然后对各个关节建立普吕克坐标系 (plücker coordinate)^[7], 简化了对机器人构型的分析, 同时坐标系建立简单易懂, 几何意义明确, 避免了 D-H 法计算求解困难和存在的奇异性问题, 但其求解过程过度依赖 paden-kahan 子问题^[8], 而机器人 POE 运动学逆解思路是设法将复杂的逆解问题分解成若干个 paden-kahan 子问题, 然后逐一求解, Sariyildiz 等^[9]在旋量理论中基于已知的几个 paden-kahan 子问题解决了常见结构的机器人运动学逆解问题, Tan 等^[10]针对某种特殊构型机器人扩展了 paden-kahan 子问题, 并对 5R 机器人的逆运动学求解证明算法的准确性, 陈庆诚等^[11]基于旋量理论结合 paden-kahan 子问题, 对某 6R 串联机器人进行逆运动学求解, 宫金良等^[12]对 Delta 机器人运动学建模运用了旋量理论, 使算法过程相比于 D-H 法简单易懂。此外逆运动学的计算归结为多项式方程组求解, 这些方程组都是高维、非线性, 求解繁杂不易, 于是吕世增等^[13]运用了吴方法对一种 6R 机器人逆运动学旋量方程进行求解, 算法正确简单。钱东海等^[14]利用经典消元法和 paden-kahan 子问题相结合的方法解决了常见 6R 工业机器人的逆解问题, 具有一定的通用性。

本文基于旋量理论推导 N 自由度机器人的 POE 运动学模型, 运用希尔维斯特结式法结合 Maple 软件对机器人逆运动学方程组进行求解运算, 以提高机器人建模及求解效率, 同时摆脱对 paden-kahan 子问题的过度依赖, 为机器人运动学建模求解提供参考。

1 基于旋量理论的机器人运动学模型建立

1.1 三维空间普吕克坐标系

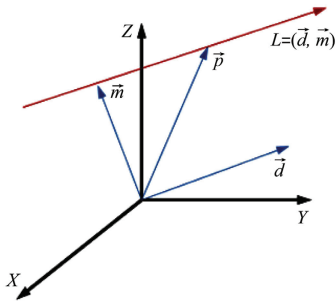
利用普吕克坐标系可以把一条三维空间直线描述为如图 1 所示。

收稿日期: 2015-07-21 修订日期: 2015-09-17

基金项目: 国家“863”计划资助项目—核反应堆专用机器人技术与应用 (2011AA040201)

作者简介: 李盛前, 男, 广西人, 博士生, 研究方向为机器人智能控制; 机器人视觉; 水下焊接机器人。广州 华南理工大学机械与汽车工程学院, 510641。Email: quanlish@yeah.net。

^{*}通信作者: 谢小鹏, 男, 教授、博士生导师, 研究方向为机械电子工程、设备状态识别、新能源汽车与摩擦学。广州 华南理工大学机械与汽车工程学院, 510641。Email: xiexp@scut.edu.cn。



注: L 为所要表达的直线; \vec{d} 为直线 L 的单位方向向量; \vec{p} 为直线上任意一点坐标向量; \vec{m} 为直线 L 对原点的线距。

Note: L as to express a straight line; \vec{d} is unit direction vector of L ; \vec{p} is any point coordinate vector on a straight line; \vec{m} is line spacing for L to the origin.

图 1 普吕克坐标法

Fig.1 Plücker coordinate

由上图知 $\vec{m} = \vec{p} \times \vec{d}$, 于是笛卡尔坐标系下的直线 L 表示为:

$$L = (\vec{d}, \vec{m}) \quad (1)$$

式中: \vec{d} 为直线 L 的单位方向向量; \vec{p} 为直线上任意一点坐标向量; \vec{m} 为直线 L 对原点的线距,

由该描述知, 普吕克坐标系表示直线后, 直线由其单位方向向量和直线上任意一点向量表示, 与直线上具体点的位置无关, 所以利用这种方法对机器人各个关节轴线进行描述时, 不受各关节连杆的具体构形限制, 这为多自由度机器人运动学建模具有通用性提供了理论基础。

1.2 三维空间中对刚体运动的旋量理论描述

在三维空间中, 设 S 为惯性坐标系, T 为固定于刚体上的坐标系, 于是刚体相对于 S 惯性坐标系的位姿运动变换集合可以表示为:

$$SE(3) = \left\{ \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; R \in R^{3 \times 3} \in SO(3), t \in R^3 \right\} \quad (2)$$

式中: $SE(3)$ 为三维空间中刚体变换集合的特殊欧式群 (special euclidian group), 即李群^[15]; R 为 3×3 旋转矩阵; t 为位置向量; $SO(3)$ 为特殊正交群。

1) 当刚体绕某一单位矢量轴 $\omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T \in R^3$ 做纯转动 θ 角时, 如图 2 所示, 刚体的运动变换可以用矩阵指数形式表示为:

$$\begin{aligned} R(\omega, \theta) &= \exp(\hat{\omega} \cdot \theta) \\ R(\omega, \theta) &\in SO(3) \end{aligned} \quad (3)$$

式中: ω 为单位矢量轴; θ 为转动角度, 单位为度;

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 称为反对称矩阵, } R(\omega, \theta) \text{ 为绕 } \omega$$

轴转动 θ 角的旋转矩阵, 根据指数映射关系得:

$$\exp(\hat{\omega} \cdot \theta) = I + \hat{\omega} \cdot \sin \theta + \hat{\omega}^2 \cdot (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

2) 当刚体绕某一单位矢量轴 $\omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T \in R^3$ 做旋转运动 (即螺旋运动) 时, 如图 3, 由 Chasles 定理^[15]知, 刚体的螺旋运动是既绕单位矢量轴 $\omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T \in R^3$ 转动 θ 角又沿平行于 ω 轴方向直线平移 v 的复合实现, 则

刚体的变换用矩阵指数形式表示为:

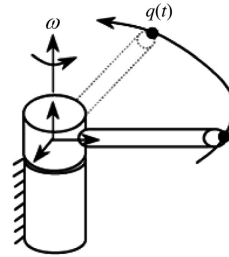
$$g = \exp(\hat{\xi} \cdot \theta) \quad (5)$$

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3) \quad (6)$$

$$v = -\omega \times q \quad (7)$$

式中: $\hat{\xi}$ 为运动旋量, 是刚体螺旋运动的无穷小量; q 为刚体转动位置; v 为 ω 与 q 的复合运动; $se(3)$ 为 $SE(3)$ 的一个李代数。

于是运动旋量 $\hat{\xi}$ 的坐标 $\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix}^T$ 即是普吕克坐标表示法。

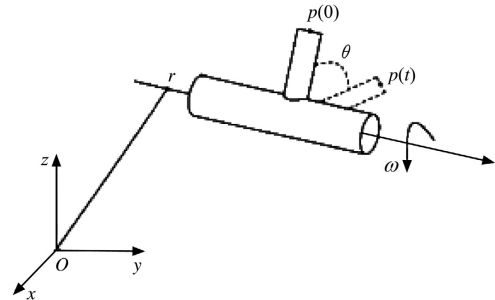


注: ω 为矢量轴; $q(t)$ 刚体转动位置。

Note: ω is phasor axis; $q(t)$ is turning position of rigid body.

图 2 刚体绕轴做纯转动

Fig.2 Rotation of rigid body around axis



注: θ 为转动角度, 单位为度; $p(0)$ 为刚体转动初始位置; $p(t)$ 为刚体转动 t 时刻的位置。

Note: θ is turning angle, unit is degree. $p(0)$ is turning initial position of rigid body; $p(t)$ is position of time t for rigid turning.

图 3 刚体绕轴旋转

Fig.3 Rotation of rigid body

又由式 (4) 得:

$$\begin{cases} g = \exp(\hat{\xi} \cdot \theta) = \begin{bmatrix} \exp(\hat{\omega} \cdot \theta) & (1 - \exp(\hat{\omega} \cdot \theta))(\omega \times v) + \omega \cdot \omega^T \cdot v \cdot \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \omega \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} g = \exp(\hat{\xi} \cdot \theta) = \begin{bmatrix} I & v \cdot \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \omega = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由以上讨论知, 任何刚体的运动都能用运动螺旋的矩阵指数形式表示。这里运动螺旋的指数形式 $\exp(\hat{\xi} \cdot \theta)$ 描述的是刚体在同一坐标系中由初始位置 $p(0)$ 旋转后到终止位置 $p(\theta)$ 的变换关系, 这与 D-H 法描述的是在不同坐标系之间的变换关系明显不同, 则有:

$$p(\theta) = \exp(\hat{\xi} \cdot \theta) p(0) \quad (10)$$

式中: $p(\theta)$ 为刚体旋转的终止位置。

1.3 N 自由度串联机器人运动学的指数形式描述

N 自由度串联机器人末端运动位姿是由各关节复合运动而形成, 假设其中第 i 个关节绕轴 ω_i 旋转运动 θ_i ($i=1,2,\dots,N$), 其余关节相对固定不动, 根据以上推导结果得:

$$g_{st}(\theta_i) = \exp(\hat{\xi}_i \cdot \theta_i) g_{st}(0) \quad (11)$$

式中: $g_{st}(0)$ 为关节 i 转动的初始位置; $g_{st}(\theta_i)$ 为关节 i 转动的终止位置;

所以机器人各关节复合螺旋运动得到的末端位姿, 即机器人的正运动学映射 $se(3) \rightarrow SE(3)$ 为:

$$g_{st}(\theta) = \exp(\hat{\xi}_1 \cdot \theta_1) \exp(\hat{\xi}_2 \cdot \theta_2) \dots \exp(\hat{\xi}_n \cdot \theta_n) g_{st}(0) \quad (n=1,2,\dots,N) \quad (12)$$

$$\text{式中: } g_{st}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 为机器人末端相对于基}$$

坐标系的初始位姿, $g_{st}(\theta)$ 为末端的最终位姿, $\hat{\xi}_i \in se(3)$ 即运动旋量的集合, $g_{st} \in SE(3)$ 旋转变换关系的集合。

2 希尔维斯特结式法消元

对于多变元方程组, 求解的主要问题归结于消元问题, 通过消元去掉其中某些变元, 使复杂多变元方程组变为一个求解简单的单变元多项式方程, 现消元法主要有吴方法、Grobner 基方法、迪克逊 (Dixon) 结式法、希尔维斯特 (Sylvester) 结式法等, 其中希尔维斯特结式法是一种经典的基本消元方法, 该法求解如式 (13) 所示的方程组^[16-17]。

$$\begin{cases} f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_0 \\ g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots b_0 \end{cases} \quad (13)$$

对 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别乘以 x^{m-1} 、 x^{m-2} 、 \dots 、 x 和 x^{n-1} 、 x^{n-2} 、 \dots 、 x , 得到原方程组的矩阵表示形式:

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & \dots & b_0 \\ & b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{n+m-1} \\ x^{n+m-2} \\ x^{n+m-3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

该矩阵行列式点积形式可以看成是未知量 x 的 $(n+m-1)$ 次多项式方程, 其中系数矩阵行列式称为式 (13) 的希尔维斯特结式, 记为 $Syl(f, g, x)$ 。根据线性方程组的基本知识, 知式 (14) 有非零解的条件为当且仅

当系数矩阵行列式等于 0, 即 $Syl(f, g, x)=0$, 于是消去了变量 x 。

当方程为 2 个二元多项式 $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$ 时, 将其写成关于 x 变量的形式:

$$\begin{cases} f(x, y) = a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + a_{n-2}(y)x^{n-2} + \dots a_0(y) \\ g(x, y) = b_m(y)x^m + b_{m-1}(y)x^{m-1} + b_{m-2}(y)x^{m-2} + \dots b_0(y) \end{cases} \quad (15)$$

式中: 变量 y 称为压缩变量; $a_n(y)$ 、 $b_m(y)$ 整体看做是 $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$ 中 x^n 、 x^m 的系数。于是可以利用上述方法求出其希尔维斯特结式, 这样求解方程组公共零点解时, 转化为对其求解希尔维斯特结式, 并使结式等于 0, 于是通过利用求解结式法可以消去变量 x , 将复杂多项式方程简化成求解单一变元多项式的根, 这就是希尔维斯特结式法消元的原理。

对于利用结式消元法求解多元方程组时, 其具体步骤如下:

1) 选定压缩变量, 重新写关于单个变元形式方程组;
2) 对方程分别乘以 x^{m-1} 、 x^{m-2} 、 \dots 、 x 和 x^{n-1} 、 x^{n-2} 、 \dots 、 x 得到新的方程组;

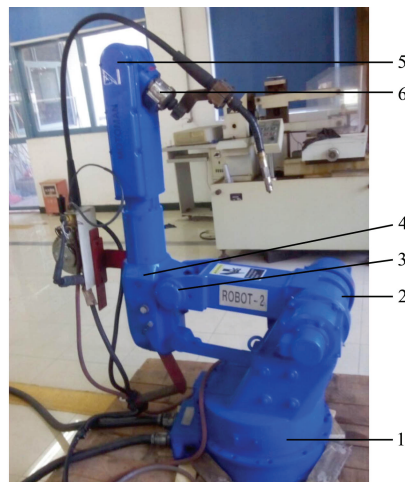
3) 运用结式消元理论消去 x 变元, 令结式矩阵等于 0, 得到关于压缩变量的单变元方程;

4) 求解压缩变量的单变元方程的根, 并将每个根进行回代到方程组中, 通过辗转相除法逐一求得各个变量值。

上述算法过程可利用符号化计算软件 Maple^[18] 实现。

3 6R 机器人运动学模型建立分析

本文将实验室购买的安川 MOTOMAN HP20 型号 6 自由度机器人作为对象进行运动学建模分析, 该机器人前 3 个关节轴线不相交, 后 3 个关节轴线相交于一点, 满足 pieper 准则, 因此存在逆运动学封闭解。安川 MOTOMAN HP20 实物如图 4, 其示意结构以及建立基坐标系 S、工具坐标系 T 和各个关节的吕普克坐标系简图如图 5。

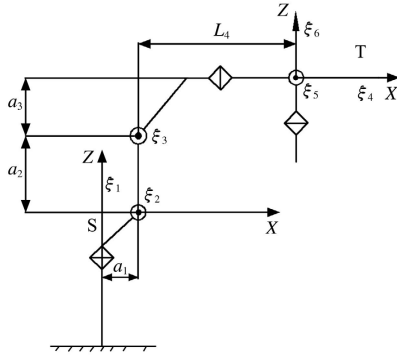


1.转动关节 1 2.转动关节 2 3.转动关节 3 4.转动关节 4 5.转动关节 5 6.转动关节 6

1. First revolute joint 2. Second revolute joint 3. Third revolute joint 4. Fourth revolute joint 5. Fifth revolute joint 6. Sixth revolute joint first

图 4 安川 MOTOMAN 机器人

Fig.4 YASKAWA MOTOMAN robot



注: ζ_i 为各关节转轴($i=1,2,\dots,6$); a_1 为 ζ_1 和 ζ_2 之间距离, mm; 其他同理;
 L_4 为 ζ_3 和 ζ_6 之间距离, mm; S 为基坐标系; T 为工具坐标系。

Note: ζ_i is each joint shaft($i=1,2,\dots,6$), a_1 is distance as between ζ_1 and ζ_2 , unit is millimeter, other in the same way, L_4 is distance as between ζ_3 and ζ_6 , unit is millimeter, S is base coordinate system, T is tool coordinate system.

图 5 各关节坐标系及其普吕克坐标系简图

Fig.5 Diagram of each joint coordinate system and its plucker coordinate system

由图 5 知, 在各个关节角为 0 度时的初始位姿为:

$$\mathbf{g}_{st}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中: m 、 n 为工作坐标系相对于基坐标系 S 的 x 坐标和 z 坐标大小。由图 5 得 $m=a_1+l_4$, $n=a_2+a_3$ 。

又由图 5 得到各个关节转轴单位矢量为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_1 = [0 & 0 & 1]^T & \boldsymbol{\omega}_2 = [0 & 1 & 0]^T & \boldsymbol{\omega}_3 = [0 & 1 & 0]^T \\ \boldsymbol{\omega}_4 = [1 & 0 & 0]^T & \boldsymbol{\omega}_5 = [0 & 1 & 0]^T & \boldsymbol{\omega}_6 = [0 & 0 & 1]^T \end{cases} \quad (17)$$

同时根据机器人连杆参数取轴线上的点为:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1 = (0, 0, 0)^T & \mathbf{q}_2 = (a_1, 0, 0)^T & \mathbf{q}_3 = (a_1, 0, a_2)^T \\ \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_5 = \mathbf{q}_6 = (a_1 + l_4, 0, a_2 + a_3)^T \end{cases} \quad (18)$$

式中: a_1 为 ζ_1 和 ζ_2 之间距离, mm; a_2 为 ζ_2 和 ζ_3 之间距离, mm; a_3 为 ζ_3 和 ζ_4 之间距离, mm; l_4 为 ζ_3 和 ζ_6 之间距离, mm。于是由式 (19):

$$\boldsymbol{\xi}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ -\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{q}_i \end{pmatrix} \quad (19)$$

得到各关节转轴的运动旋量坐标, 所以机器人正运动学模型为:

$$\mathbf{g}_{st}(\theta) = \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 \cdot \theta_1) \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_2 \cdot \theta_2) \dots \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_6 \cdot \theta_6) \cdot \mathbf{g}_{st}(0) \quad (20)$$

其中 $\mathbf{g}_{st}(\theta)$ 为末端位姿矩阵:

$$\mathbf{g}_{st}(\theta) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & \alpha_x & p_x \\ n_y & o_y & \alpha_y & p_y \\ n_z & o_z & \alpha_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

4 6R 机器人逆运动学求解过程

机器人的逆运动学是预先规定期望机器人末端位姿 $\mathbf{g}_{st}(\theta)$, 求解对应的各关节转角 $\theta_i (i=1,2,\dots,6)$, 即 $\mathbf{g}_{st}(\theta)$ 为已知量, 根据式 (20) 反运算求解 $\theta_i (i=1,2,\dots,6)$ 。

由旋量理论建立的机器人运动学模型, 采用 Sylvester 结式法进行逆解, 求解过程运用 Maple 软件, 步骤如下:

1) 求解 θ_1 、 θ_2 、 θ_3

将机器人运动学模型式 (20) 两边同右乘初始位姿 $\mathbf{g}_{st}^{-1}(0)$, 得:

$$\mathbf{g} = \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 \cdot \theta_1) \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_2 \cdot \theta_2) \dots \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_6 \cdot \theta_6) \quad (22)$$

式中: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{st} \cdot \mathbf{g}_{st}^{-1}(0)$ 。

根据螺旋理论, 位于转轴上的 \mathbf{q} 点, 无论旋转多少角度, \mathbf{q} 点的位置保持不变, 即

$$\exp(\hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \theta) \mathbf{q} = \mathbf{q} \quad (23)$$

因此将式 (22) 两边同时右乘关节 4、5、6 的共同交点 \mathbf{q}_6 , 得:

$$\exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 \cdot \theta_1) \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_2 \cdot \theta_2) \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_3 \cdot \theta_3) \mathbf{q}_6 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{q}_6 \quad (24)$$

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{q}_6 = (A, B, C, 1)^T \quad (25)$$

根据式 (4)、式 (8) 对式 (24) 展开, 由于:

$$\exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 \cdot \theta_1) \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_2 \cdot \theta_2) \exp(\hat{\boldsymbol{\xi}}_3 \cdot \theta_3) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & r_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & r_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中: $f_{11} = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_3$ 、 $f_{12} = -s_1$ 、
 $f_{13} = c_1 \cdot c_2 \cdot s_3 + c_1 \cdot s_2 \cdot c_3$ 、 $f_{21} = s_1 \cdot c_2 \cdot c_3 - s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$ 、
 $f_{22} = c_1$ 、 $f_{23} = s_1 \cdot c_2 \cdot s_3 + s_1 \cdot s_2 \cdot c_3$ 、 $f_{31} = -s_2 \cdot c_3 - c_2 \cdot s_3$ 、
 $f_{32} = 0$ 、 $f_{33} = -s_2 \cdot s_3 + c_2 \cdot c_3$ 、
 $r_1 = c_1 \cdot c_2 (a_1 - a_1 \cdot c_3 - a_2 \cdot s_3) + c_1 \cdot s_2 (a_1 \cdot s_3 + a_2 - a_2 \cdot c_3) + c_1 (a_1 - a_1 \cdot c_2)$
 $r_2 = s_1 \cdot c_2 (a_1 - a_1 \cdot c_3 - a_2 \cdot s_3) + s_1 \cdot s_2 (a_1 \cdot s_3 + a_2 - a_2 \cdot c_3) + s_1 (a_1 - a_1 \cdot c_2)$
 $r_3 = -s_2 (a_1 - a_1 \cdot c_3 - a_2 \cdot s_3) + c_2 (a_1 \cdot s_3 + a_2 - a_2 \cdot c_3) + a_1 \cdot s_2$ 。

于是式 (24) 展开写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & r_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & r_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 + l_4 \\ 0 \\ a_2 + a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

将式 (27) 展开, 左右对应元素相等, 整理得:

$$\begin{cases} (a_1 + l_4) c_1 c_2 c_3 - (a_1 + l_4) c_1 s_2 s_3 + (a_2 + a_3) c_1 c_2 s_3 + (a_2 + a_3) c_1 s_2 c_3 + \\ c_1 c_2 (a_1 - a_1 c_3 - a_2 s_3) + c_1 s_2 (a_1 s_3 + a_2 - a_2 c_3) + c_1 (a_1 - a_1 c_2) = A \\ (a_1 + l_4) s_1 c_2 c_3 - (a_1 + l_4) s_1 s_2 s_3 + (a_2 + a_3) s_1 c_2 c_3 + (a_2 + a_3) s_1 s_2 c_3 + \\ s_1 c_2 (a_1 - a_1 c_3 - a_2 s_3) + s_1 s_2 (a_1 s_3 + a_2 - a_2 c_3) + s_1 (a_1 - a_1 c_2) = B \\ -(a_1 + l_4) s_2 c_3 - (a_1 + l_4) c_2 s_3 - (a_2 + a_3) s_2 s_3 + (a_2 + a_3) c_2 c_3 - \\ s_2 (a_1 - a_1 c_3 - a_2 s_3) + c_2 (a_1 s_3 + a_2 - a_2 c_3) + a_1 c_2 = C \end{cases} \quad (28)$$

其中令 $\sin \theta_i = s_i$, $\cos \theta_i = c_i$, 又由三角函数关系得:

$$\begin{cases} s_1^2 + c_1^2 = 1 \\ s_2^2 + c_2^2 = 1 \\ s_3^2 + c_3^2 = 1 \end{cases} \quad (29)$$

令 $s_1 = x_1, c_1 = x_2, s_2 = x_3, c_2 = x_4, s_3 = x_5, c_3 = x_6$, 于是式 (28) 和式 (29) 组成的方程组如式 (30):

$$\begin{cases} l_4 x_2 x_4 x_6 - l_4 x_2 x_3 x_5 + a_3 x_2 x_4 x_5 + a_3 x_2 x_3 x_6 + a_2 x_2 x_3 + a_1 x_2 = A \\ l_4 x_1 x_4 x_6 - l_4 x_1 x_3 x_5 + a_3 x_1 x_4 x_5 + a_3 x_1 x_3 x_6 + a_2 x_1 x_3 + a_1 x_1 = B \\ -l_4 x_3 x_6 - l_4 x_4 x_5 - a_3 x_3 x_5 + a_3 x_4 x_6 + a_2 x_4 = C \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3^2 + x_4^2 = 1 \\ x_5^2 + x_6^2 = 1 \end{cases} \quad (30)$$

对式(30)采用希尔维斯特结式法消元,最后得到关于 x_1 单变元多项式,容易求解出 x_1 ,然后将 x_1 回代并利用辗转相除法不断循环依次求解出 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 、 x_6 ,进而得出 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 。

2) 求解 θ_4 、 θ_5 、 θ_6

将 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 代入式(17)并转化为:

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\xi}_4 \cdot \theta_4) \exp(\hat{\xi}_5 \cdot \theta_5) \exp(\hat{\xi}_6 \cdot \theta_6) = \\ \exp(-\hat{\xi}_3 \cdot \theta_3) \exp(-\hat{\xi}_2 \cdot \theta_2) \exp(\hat{\xi}_1 \cdot \theta_1) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (30)$$

然后在转轴 ω_6 上取一点 p_6 ,并且该点不在 ω_4 、 ω_5 上,于是得:

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\xi}_4 \cdot \theta_4) \exp(\hat{\xi}_5 \cdot \theta_5) p_6 = \\ \exp(-\hat{\xi}_3 \cdot \theta_3) \exp(-\hat{\xi}_2 \cdot \theta_2) \exp(-\hat{\xi}_1 \cdot \theta_1) \mathbf{g} \cdot p_6 \end{aligned} \quad (31)$$

利用步骤(1)中同样的方法求得 θ_4 、 θ_5 。又将 θ_4 、 θ_5 代入式(31)并整理得:

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\xi}_6 \cdot \theta_6) = \exp(-\hat{\xi}_5 \cdot \theta_5) \exp(-\hat{\xi}_4 \cdot \theta_4) \\ \exp(-\hat{\xi}_3 \cdot \theta_3) \exp(-\hat{\xi}_2 \cdot \theta_2) \exp(-\hat{\xi}_1 \cdot \theta_1) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (32)$$

由式(32)可以容易求出 θ_6 ,至此 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 全部求解出来。

5 逆解实例计算验证

根据安川 MOTOMAN HP20 机器人具体的连杆参数: $a_1=150$, $a_3=140$, $a_2=760$, $l_4=795$ 。

1) 依各关节角变化范围,设定各关节转角;

为了便于计算验证,各关节给定特殊转角为:

$$(\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6)^T = (0 \ 0 \ 90 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

2) 将各转角代入正运动学模型式(20)得末端位姿:

$$\mathbf{g}_{st}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 150+140 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -795+760 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而根据机器人机构几何关系易算得末端位姿:

$$\mathbf{g}_{st}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 290 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以算法是正确的。

为了更能证明算法的正确性,在各关节转角范围内随机产生一组转角:

$$(\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6)^T = (25 \ 30 \ 40 \ 150 \ 55 \ 140)^T$$

代入式(20)得到该组合角的末端位姿为:

$$\mathbf{g}_{st}(\theta) = \begin{bmatrix} 0.0426 & -0.9979 & -0.0479 & 846.0048 \\ -0.9406 & -0.0238 & -0.3388 & 394.4985 \\ 0.3370 & 0.0595 & -0.9396 & -40.9935 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) 位姿 $\mathbf{g}_{st}(\theta)$ 作为期望的末端位姿,最后解得各关节转角的组合实解如表1所示。

表1 旋量理论运动学8组逆解
Table 1 Eight groups of inverse kinematics

序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	25.0010	30.0000	40.0009	150.0000	55.0001	140.0050
2	25.0010	30.0000	40.0009	30.0000	124.9999	-40.0009
3	25.0010	155.9936	159.9678	27.7362	-128.0392	-47.4293
4	25.0010	155.9936	159.9678	-152.2638	-51.9608	132.5707
5	-154.9989	-140.2194	12.4989	146.1193	-120.9841	-95.2384
6	-154.9989	-140.2194	12.4989	-33.8807	-59.0159	84.7616
7	-154.9989	-44.1104	-172.5242	161.6771	155.7553	-57.5543
8	-154.9989	-44.1104	-172.5242	-18.3229	24.2447	122.4457

注: θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 分别为机器人各关节对应转角。

Note: θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 , θ_5 and θ_6 are corresponding to each joint angle of robot respectively.

从表1中可以看出,逆运动学解出8组实解,第1组实解与随机生成的各个关节组合转角近似相等,再将其余7组实解分别代入正运动学公式(20)计算得到的末端位姿矩阵完全相同,说明本文机器人运动学建模方法和逆运动学求解计算方法是正确的;并且逆运动学的解是多组解,即逆运动学解是一对多的情况,需要从当前运动位姿根据运动行程最短、能量消耗最小等最优原则从多组实解中选择最优的一组实解作为最终的逆解。

6 结论

1) 对多自由度机器人采用螺旋理论建模法代替传统的D-H法,建立了多自由度机器人矩阵指数积运动学模型,该方法几何意义明确易懂,且不受限于机器人的构型,具有通用性,利于推广至其他构型机器人。

2) 采用希尔维斯特(Sylvester)结式消元法对逆运动学复杂方程求解,降低了方程组求解的难度,以及解决了以往基于旋量理论的逆运动学求解对paden-kahan子问题的过度依赖,并结合Maple软件进行数学符号化运算对结果进行求解,效率比传统算法提高了30%,并降低对方程组的求解难度,最后通过实例计算验证了本方法的正确性。

[参 考 文 献]

- [1] Duffy J. Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators[M]. Edward Arnold, London, 1980.
- [2] Denavit J, Hartenberg R S. A kinematic notation for lower-Pair mechanisms based on matrices[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, 21(5): 215-221.
- [3] Lee Rongshean, Yan Honglin. Development of universal environment for constructing 5-axis virtual machine tool based on modified D-H notation and OpenGL[J]. Robotics

- and Computer-Integrated Manufacturing, 2010, 26(3): 253—262.
- [4] Sariyildiz E, Cakiray E, Temeltas H. A comparative study of three inverse kinematic methods of serial industrial robot manipulators in the screw theory framework[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2011, 8(5): 9—24.
- [5] Chen I M, Yang G L, Tan C T, et al. Local POE model for robot kinematic calibration[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(11/12): 1215—1239.
- [6] Liu Wufa, Gong Zhenbang, Wang Qinqin. Investigation on kane dynamics equations based on screw theory for open-chain manipulators[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(5): 627—635.
- [7] Wang Xiangke, Han Dapeng, Yu Changbin, et al. The geometric structure of unit dual quaternion with application in kinematic control[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 389(2): 1352—1364.
- [8] Rocha C, Tonetto C, Dias A. A comparison between the denavit-hartenberg and the screw-based methods used in kinematic modeling of robot manipulators[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(4): 723—728.
- [9] Sariyildiz E, Temeltas H. Solution of inverse kinematic problem for serial robot using quaternion[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Changchun: IEEE, 2009: 26—31.
- [10] Tan Yuesheng, Xiao Aiping. Extension of the second paden-kahan sub-problem and its' application in the inverse kinematics of a manipulator[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics Automation and Mechatronics. Chengdu: IEEE, 2008: 379—381.
- [11] 陈庆诚, 朱世强, 王宣银, 等. 基于旋量理论的串联机器人逆解子问题求解算法[J]. 浙江大学学报工学版, 2014, 48(1): 8—14.
- Chen Qingcheng, Zhu Shiqiang, Wang Xuanyin, et al. Inverse kinematics sub-problem solution algorithm for serial robot based on screw theory[J]. Journal of Zhejiang University Engineering Science, 2014, 48(1): 8—14. (in Chinese with English abstract)
- [12] 宫金良, 黄风安, 张彦斐. 基于指数积的Delta机器人运动学正解建模[J]. 北京理工大学学报, 2013, 33(6): 581—585.
- Gong Jinliang, Huang Feng'an, Zhang Yanfei. Direct kinematic analysis of delta robot based on exponential product[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2013, 33(6): 581—585. (in Chinese with English abstract)
- [13] 吕世增, 张大卫, 刘海年. 基于吴方法的 6R 机器人逆运动学旋量方程求解[J]. 机械工程学报, 2010, 46(17): 39—41.
- Lü Shizeng, Zhang Dawei, Liu Hainian. Solution of screw equation for inverse kinematics of 6R robot based on Wu's method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(17): 39—41. (in Chinese with English abstract)
- [14] 钱东海, 王新峰, 赵伟, 等. 基于旋量理论和 paden-kahan 子问题的 6 自由度机器人逆解算法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(9): 72—76.
- Qian Donghai, Wang Xinfeng, Zhao Wei, et al. Algorithm for the inverse kinematics calculation of 6-DOF robots based on screw theory and paden-kahan sub-problems[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(9): 72—76. (in Chinese with English abstract)
- [15] Selig J. Geometrical Foundations of Robotics[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co., Inc., 2000.
- [16] Chionh E, Zhang M, Goldman R N. Fast computation of the bezout and dixon resultant matrices[J]. Journal of Symbolic Comput, 2002, 33(1): 13—29.
- [17] Chtcherba A D, Kapur D. Constructing sylvester-type resultant matrices using the dixon formulation[J]. J Symbolic Comput, 2004, 38: 777—814.
- [18] 陈晓霞. Maple指令参考手册[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.

Analysis of inverse kinematic solution for 6R robot based on screw theory and Sylvester resultant

Li Shengqian, Xie Xiaopeng^{*}

(School of Mechanical and Automatic Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

Abstract: The traditional denavit-hartenber (D-H) method is very popular to set up kinematic model for robot, but this method has lots of disadvantages, which include complexity, singularity and difficulties in inverse kinematic model solving. therefore the kinematic model of six degree freedom robot using traditional denavit-hartenber (D-H) method, can not get the high precision for inverse solution, and make the robot instantaneity for working. This article applied a product-of-exponential (POE) kinematic model based on screw theory for multi-degree of freedom series robots. Firstly, we used the screw theory to set up model for every joint of robot; then put matrix of every joint model multiply, which could get the POE of kinematic model for multi degree of freedom series robot. As we known from the above, the screw

theory method was not limited by the form of joint, and could set up the kinematic model of robot very conveniently. This method was applicable to all types of multi degree of freedom series robot with versatility. Then the sylvester resultant method was used to solve these equations. The sylvester resultant method could solve high-dimensional nonlinear equations in advantage, and get the result of the nonlinear equations fast. The process of solving was used Maple software to calculate, due to the Maple software can use the symbol instead of the number to algorithm. Finally, in order to prove this method was correct and useful, we got special data, which was put into the forward kinematics formula to calculate the terminal attitude of robot, then we put this result of terminal attitude into the inverse kinematics formula, and got turning angle of each joint for the 6R robot, which was correct in the result from the calculation. In order to prove this method is correct further, we calculated from the perspective of geometry, which was through the geometric relationship of the robot to calculate each joint turning angle, and this result was as the same. At last, this inverse kinematic model and solving method was proved as an efficient and accurate method by calculating an example. In general, this method has efficient, accurate, reliable, and clear significance at physical and mathematician, also can apply to other robots with differences in configuration in kinematic modeling and inverse kinematic solution, providing a reference to quickly solution in inverse kinematic of robots. Meanwhile, this method can improve the algorithm efficiency 30% more than the general method of elimination.

Key words: robots; kinematics; models; screw theory

欢迎赐稿 欢迎订阅2016年《干旱地区农业研究》

《干旱地区农业研究》创刊于 1983 年, 是国内旱农领域创办最早的学术类中文核心期刊。期刊由教育部主管、西北农林科技大学主办。本刊立足于中国北方干旱半干旱及半湿润易旱地区农业科学研究前沿, 兼顾湿润地区季节性干旱农业实际和国外旱区农业研究动态, 全面反映我国干旱、半干旱及湿润易旱地区农业科学技术研究新成果、新理论、新技术、新经验, 介绍国外有关旱农最新研究进展。以旱作农业为重点, 重视水资源合理利用及灌溉农业的发展, 应用科学研究与应用基础科学研究并重是本刊的特色。本刊主要刊登作物抗旱生理及调控、作物抗旱育种、节水灌溉理论与技术、旱作节水耕作与栽培技术, 作物与土壤水分动态、土壤与作物营养、旱区农业生态与资源利用、旱作农业机械、旱情监测预报、旱区气候对作物的影响等方面具有创新性、实用性的研究论文、研究简报、文献综述以及最新研究动态快报。本刊还设有“专家论坛”栏目, 约请国内外旱农研究专家进行专题论述。

《干旱地区农业研究》为《中文核心期刊要目总览》农业科学类核心期刊、科技部中国科技核心期刊。期刊影响因子、被引频次连续多年进入“中国科技期刊前 300 名排行表”。据中国知网 2013 年统计数据, 《干旱地区农业研究》影响因子和总被引频次排名农业科学综合类第三位。《干旱地区农业研究》被中国科学引文数据库、中国学术期刊综合评价数据库、中国知网、俄罗斯《文摘杂志》等国内外多家权威数据库收录和转载。

《干旱地区农业研究》为“中国期刊方阵”双效期刊, 近年来荣获国家科委、中共中央宣传部、新闻出版署“全国优秀科技期刊”, 科技部“中国精品科技期刊”, 教育部“中国高校优秀科技期刊”, 中国农学会“第二届优秀科技期刊”以及陕西省“精品科技期刊”等 20 多项奖励。

《干旱地区农业研究》作者和读者遍及全国各地, 在我国旱农研究领域产生了广泛影响。其鲜明的专业特色和办刊质量得到了广大作者、读者的普遍认可和赞誉, 是推动旱农学术研究、促进成果交流的高效平台。

《干旱地区农业研究》国内外公开发行, 国内刊号: CN61-1088/S, 国际刊号: ISSN1000-7601, 双月刊, 单月 15 日出版。国际大 16 开本, 每期定价 20 元, 全年 120 元。欢迎新老读者及时到当地邮局(所)订阅, 邮发代号: 52-97, 漏订者可直接汇款至编辑部补订。海外发行: 中国国际图书贸易集团有限公司, 邮发代号: C4095。

编辑部地址: 陕西杨凌邠城路 3 号西北农林科技大学南校区 1-14 信箱《干旱地区农业研究》编辑部

邮编: 712100; 电话: 029-87082121; Email: ghbjb@nwsuaf.edu.cn; 在线投稿: http://ghdqnyyj.ijournal.cn