

基于诊断函数的薄层流对数律研究

杨坪坪^{1,2}, 张玉珊^{1,2}, 李 瑞^{1,2*}, 张会兰^{3,4}, 王云琦^{3,4}

(1. 贵州师范大学喀斯特研究院, 贵阳 550001; 2. 国家喀斯特石漠化防治工程技术研究中心, 贵阳 550001; 3. 北京林业大学水土保持学院重庆三峡库区森林生态系统教育部野外科学观测研究站, 北京 100083; 4. 北京林业大学水土保持学院重庆缙云山三峡库区森林生态系统国家定位观测研究站, 北京 100083)

摘 要: 薄层流是一种特殊形态的明渠流, 其特点是水深浅薄。为探讨薄层流流速分布是否满足对数律, 该研究利用高分辨率粒子图像测速 (Particle Image Velocimetry, PIV) 技术, 分析 8 组薄层流 (水深 0.49~1.1 cm, 雷诺数 835~2 877) 及 1 组深水明渠紊流 (对照) 床面至水面的流速分布、紊动强度及雷诺应力。并基于诊断函数, 研究薄层流流速是否满足对数律、对数区的范围及卡门常数变化规律。结果表明, 薄层流的无量纲流速从过渡区开始偏离深水明渠水流中的理论曲线; 薄层流的流向紊动强度大于深水明渠紊流, 但垂向紊动强度小于深水明渠紊流, 随着水深的增加, 两者的紊动强度逐渐重合; 雷诺应力的特征表明, 随着水深的增加, 受黏性力影响的范围越来越小。薄层流诊断函数曲线的特征说明薄层流中不存在严格意义的对数区, 但当水深极浅时 (水深 ≤ 0.53 cm), 流速基本满足对数律, 且卡门常数在 0.2~0.3 范围内。当水深和雷诺数增加, 薄层流诊断函数曲线出现波动而不再近似水平。为方便实际计算, 若允许诊断函数有一定的倾斜, 对数区在极大值与极小值之间的范围, 薄层流的卡门常数随着雷诺数的增加而增加。此外, 薄层流对数区的范围并非稳定, 随着雷诺数的增加, 对数区影响的范围变大。该研究可为薄层流的理论研究和流速计算提供参考。

关键词: 流速; 粒子图像测速; 渠道; 薄层流; 卡门常数; 诊断函数; 对数律

doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.2021.01.021

中图分类号: TV131.3; TV732.6

文献标志码: A

文章编号: 1002-6819(2021)-01-0167-09

杨坪坪, 张玉珊, 李瑞, 等. 基于诊断函数的薄层流对数律研究[J]. 农业工程学报, 2021, 37(1): 167-175. doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.2021.01.021 <http://www.tcsae.org>

Yang Pingping, Zhang Yushan, Li Rui, et al. Logarithmic law of shallow water flow by using diagnostic function[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE), 2021, 37(1): 167-175. (in Chinese with English abstract) doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.2021.01.021 <http://www.tcsae.org>

0 引 言

明渠流具有水面和床面 2 个边界, 流速的分布受到 2 个边界的影响。深水明渠紊流具有受床面黏性主导的内区以及受水面惯性力主导的外区^[1-2]。黏性作用从床面至水面逐渐减弱, 而惯性作用从水面至床面逐渐减弱。深水明渠紊流中存在着受黏性力和惯性力影响皆不显著的区域, 该区域的流速符合对数律^[1-3]。根据对数律, 深水明渠紊流中某点的流向流速与该点距床面的距离成正比, 与卡门常数成反比。很多研究对卡门常数的取值和对数律的适用范围进行了探讨^[4-7]。基于激光流速仪测量试验和总结前人数据的基础上, Nezu 等^[1]得到卡门常数为 0.412, 在无量纲水深大于 30 且相对水深小于 0.6 的范围内对数律适用。该研究结果受到了广泛的应用^[8-10]。对数律的发现对明渠流速的研究具有重要意义, 指导了工

程应用中流速的计算。

薄层流是一种特殊形态的明渠流, 其特点是水深浅, 一般在毫米量级^[11]。薄层流常见于坡面漫流和地表径流, 是坡面水力侵蚀的动力源, 不仅剥离土壤, 还能搬运松散的土壤颗粒, 从而产生水土流失, 历来受到广泛关注^[12-13]。相较于深水明渠紊流, 薄层流水面与床面的距离非常近, 因而是否存在受水面和床面影响都很微弱的区域, 薄层流流速是否满足对数律成为亟需确定的问题。为研究薄层流的流速分布, Li 等^[14]采用热膜流速仪测量床面至水面的流速分布, 结果表明薄层流流速分布基本满足对数律。安翼等^[15]分析前人的数据, 利用实测数据拟合对数律, 拟合效果较好, 认为光滑床面上的薄层流流速符合对数律。然而, 对数律的分离是一个渐进的过程, 采用回归的方法很难判断流速分布与对数律完全吻合的范围。针对常规方法很难准确判断对数区范围的问题, Osterlund 等^[2,16]采用诊断函数对明渠流流速分布进行分析, 从理论上严格检验了对数区的范围。根据该思路, 为研究薄层流中对数律的规律, 本研究利用粒子图像测速 (Particle Image Velocimetry, PIV) 技术测量了床面至水面的薄层流流速分布, 并基于诊断函数检验薄层流流速是否满足对数律, 确定卡门常数的取值和对数律的适用范围, 以期深入理解薄层流的特征, 为薄层流的理论研究和流速计算提供参考。

收稿日期: 2020-07-10 修订日期: 2020-10-10

基金项目: 国家自然科学基金 (32060372); 贵州省教育厅青年科技人才成长项目 (黔教合 KY 字[2021]293); 贵州师范大学 2019 年博士科研启动项目 (GZNU2019)3 号)

作者简介: 杨坪坪, 博士, 讲师, 主要研究方向为水土保持与土壤侵蚀等。

Email: pingping_yang0320@163.com

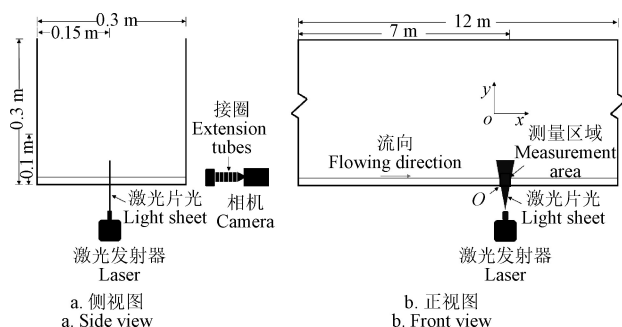
*通信作者: 李瑞, 博士, 研究员, 主要研究方向为土壤侵蚀与水土保持、生态环境工程等。Email: rlfer@126.com

1 试验与方法

1.1 薄层流流速观测的试验系统

试验在玻璃水槽中开展, 水槽长为 12 m, 宽和高均为 0.3 m。整个水槽是自循环的系统, 水槽入口有计算机系统控制的变频水泵和流量计, 用以测量和控制流量。水流入口处放置稳定水流的装置, 使进入水槽的水流顺直。水槽沿程等间距布设了 6 个超声波水位计 (型号为 Baumer S14, 精度 ± 0.01 cm), 水位计距水流入口分别为 0.5、2.5、4.5、6.5、8.5、10.5 m。调节尾门及观测水位沿程变化可以使水流达到恒定均匀流的状态。水流温度由数显温度计测量, 精度可达 ± 0.1 °C。为保证水流充分发展, 试验测量段距离入口 7 m, 并由 PIV 测量试验段的流场。

图 1 所示为试验段的试验装置示意图。PIV 由示踪粒子、激光器以及高速相机组成。示踪水流所采用的粒子为空心玻璃珠, 直径为 $10\text{ }\mu\text{m}$, 密度为 $1.06\times 10^3\text{ kg/m}^3$ 。空心玻璃珠的密度和水流密度相近, 能够有效地示踪水流, 避免出现粒子与水流不同步的现象。激光由 8 W 的连续激光器发射以照亮示踪粒子使其能够被相机捕捉。高速相机 640×480 像素, 频率高达 452 Hz (1 s 能够拍摄 452 张图片)。



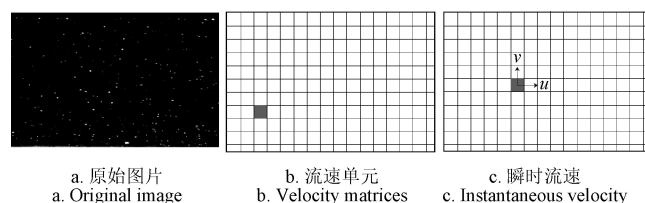
注: O 表示坐标原点; x 表示平行于水流方向; y 表示垂直于床面且表示测点距床面的距离, m。
Note: O is origin of coordinates; x is parallel to flow direction; y is perpendicular to flume bed and represents distance from measurement points to flume bed, m.

图 1 试验段试验装置示意图

Fig.1 Schematic diagram of experimental set-up in test section

图 2 展示了 PIV 的测速过程, 在试验开始前向水体中施用示踪粒子, 相机拍摄得到图 2a 所示的图片, 软件系统将图片划分为若干大小相等的流速单元 (图 2b), 用同样的方法得到相邻帧的流速单元, 计算两帧间流速单元灰度值的自相关系数, 具有最大自相关系数的认定为同一流速单元, 如图 2b 和 2c 所示为同一流速单元分别在两帧图像的位置, 根据其流向和垂向的位移, 结合相机的频率, 可计算得到流向流速 (u) 和垂向流速 (v), 每个流速单元的流速组成了整个流场。本试验为适应薄层流水深浅薄的特殊条件, 借鉴钟强等^[17]的方法, 增加了相机与镜头之间的距离, 以增加相机分辨率, 相机的分辨率高达 64 像素/mm。在该分辨率下, 若流速单元的像素为 8, 则 1 mm 水深包含 8 个测点。通过该操作可将视域放大, 从而满足浅水深的流速测量。本试验拍摄相

片的大小为 $1.3\text{ cm}\times 0.8\text{ cm}$ 。杨坪坪等^[18-21]的试验结果表明该套高分辨率的 PIV 系统能够较好地测量薄层流流速。



注: u 为流向流速, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; v 为垂向流速, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。
Note: u is streamwise velocity, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; v is vertical velocity, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

图 2 粒子图像测速仪测速

Fig.2 Velocity measurement by particle image velocimetry

本试验每隔 40 张拍摄 1 对流场, 为满足采样要求, 捕获 5 000 对流场, 共拍摄 20 万张相片。流速单元为 16×16 像素, 重叠率为 50%, 共迭代 3 次, 因此实际 2 个相邻流速单元间的距离为 8 像素。所得的瞬时流场由高斯滤波法剔除错误的信息及图像噪音。本试验采用笛卡尔坐标系, 坐标原点位于测量区域的左下角并在图 1 中用“ O ”表示, x 轴平行于水流方向, y 轴垂直于床面。相应地, x 方向的流速分量为 u , y 方向的流速分量为 v 。时均流场由 5 000 对瞬时流场相对对应点平均而得, 随后将同一高度的流速平均求得该高度的平均流速, 从而计算得到流速轮廓线, 详细的提取步骤见杨坪坪等^[21]的研究。

1.2 计算方法

1) 对数律

根据 Nezu 等^[1]的研究, 对数律的计算如式 (1) 所示:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (u^+ = \frac{u}{u_*}; y^+ = \frac{yu_*}{\mu}) \quad (1)$$

式中 u^+ 和 y^+ 分别表示无量纲流向流速和无量纲水深; u 和 u_* 为流向流速和摩阻流速, m/s ; y 为测点距床面高度, m ; μ 为运动黏滞系数 (m^2/s), $\mu = 1.775\times 10^{-6}/(1+3.37\times 10^{-2}t + 2.2\times 10^{-4}t^2)$, 其中 t 表示温度, °C; κ 为卡门常数, C 为积分常数。

摩阻流速 u_* 的计算^[1]如式 (2) 所示:

$$u_* = \sqrt{gHJ} \quad (2)$$

式中 g 为重力常数, 9.8 m/s^2 ; H 为水深, m ; J 为水力能坡, $J \approx S$, S 为坡度, %。

雷诺数 Re 和傅汝德数 Fr 的计算^[11]分别如式 (3) 和式 (4) 所示:

$$Re = \frac{UR}{\mu} \quad (3)$$

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}} \quad (4)$$

式中 U 为平均流速, m/s ; R 为水力半径, m 。

无量纲全水深 H^+ 的计算^[20]如式 (5) 所示:

$$H^+ = \frac{Hu_*}{\mu} \quad (5)$$

紊动强度表示流体质点的脉动强度，流向流速和垂向流速的紊动强度^[1]计算分别见式（6）和式（7）。雷诺应力是流体质点 2 个方向脉动强度乘积，表示 2 个流体质点间碰撞的强弱程度，雷诺应力的计算^[1]见式（8）。

$$u' = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2} \quad (6)$$

$$v' = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} \quad (7)$$

$$-u'v' = \frac{-1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})v_i \quad (8)$$

式中 u' 和 v' 分别表示流向和垂向的紊动强度，m/s； u_i 和 v_i 表示第 i 流场流向和垂向的瞬时流速，m/s。 \bar{u} 表示流向的时均流速，m/s； N 表示计算的流场个数； $-u'v'$ 表示雷诺应力， m^2/s^2 。在后文中，为方便比较，将紊动强度和雷诺应力无量纲化，无量纲流向紊动强度为 u'/u_* ，无量纲垂向紊动强度为 v'/u_* ，无量纲雷诺应力为 $-u'v'/u_*^2$ 。

2) 诊断函数

为研究对数区的范围及式（1）特征参数的取值问题，Osterlund 等^[2]分析对数律的公式，提出了诊断函数 Ξ ，其本质是分析无量纲流向流速分布曲线的斜率，若曲线中存在严格意义的对数区，则 Ξ 为常数，且等于卡门常数 κ 。自该方法提出以来，受到了广泛的应用^[22-25]。计算如式（9）所示：

$$\Xi = \left(y^+ \frac{du^+}{dy^+} \right)^{-1} \quad (9)$$

该函数的倒数同时也表示无量纲流向流速分布的斜率，且 $\Xi = \kappa$ 。若某一区间内满足对数律分布，则诊断函数 Ξ 为常数，且等于卡门常数 κ 。

1.3 水流条件

本试验共设计了 8 组次的薄层流，表 1 所示为本试验水流的条件，表中每组次按照水深排序，并以 C 加序号表示，其中 C1~C8 为薄层流；CK 为深水明渠紊流，CK 的作用为对比薄层流与深水明渠紊流的差异性。Yang 等^[20]研究表明当无量纲的全水深 $H^+ < 550$ 时，薄层流雷诺应力分布、阻尼系数以及积分常数与深水明渠紊流具有差异，因此得到当 $H^+ < 550$ 时满足薄层流的条件。本试验中各组次薄层流的 $H^+ \leq 180$ ，因而水深满足薄层流的条件。为避免水深过浅而出现滚波，从而影响薄层流特性，本试验设计水深 $H > 0.45$ cm，C1~C8 的水深变化范围为 0.49~1.1 cm。薄层流 C1~C8 的雷诺数 Re 变化范围为 835~2 877，皆 $< 5 000$ ，属于过渡流；而傅汝德数 $Fr < 1$ ，属于缓流。C1~CK 组次， H 和 Re 逐渐变大而 Fr 没有明显的变化。各组次宽深比皆 > 5 （槽宽与水深的比值，本试验的槽宽为 30 cm），因此边壁对测量区域的水流没有显著影响，可视为准二维流动^[26]。

表 1 中各组次的相机分辨率具有差别的原因是 C1~CK 组次水深逐渐增加，导致超过相机的测量范围，因此需要扩大相机与测点之间的距离，距离越远则分辨率越低，所以 C1~CK 组次的相机分辨率越来越小。此外，相机的频率越高越消耗计算资源，在 CK 组次的小分辨率下，相机频率在 208 Hz 时能测量出其瞬时流速，因此降低了 CK 组次的相机频率。

表 1 本研究水流条件
Table 1 Flow conditions in present study

组次 Cases	水深 Flow depth (H)/cm	无量纲全水深 Dimensionless total flow depth (H^+)	坡度 Slope (S)/%	水力半径 Hydraulic radius (R)/(10 ⁻² m)	平均流速 Mean velocity (U)/(10 ⁻² m·s ⁻¹)	雷诺数 Reynolds number (Re)	傅汝德数 Froude number (Fr)	相机频率 Camera frequency/Hz	相机分辨率 Camera resolution/ (像素·mm ⁻¹)
C1	0.49	68	0.20	0.47	15	835	0.68	452	64
C2	0.55	73	0.20	0.53	16	1 092	0.85	452	64
C3	0.66	90	0.23	0.63	18	1 324	0.79	452	64
C4	0.76	96	0.01	0.72	19	1 466	0.71	452	42
C5	0.83	114	0.20	0.79	22	1 985	0.86	452	39
C6	0.94	147	0.23	0.88	23	2 120	0.76	452	39
C7	1.02	162	0.25	0.96	25	2 452	0.78	452	39
C8	1.10	180	0.24	1.02	27	2 877	0.81	452	39
CK	3.20	721	0.20	2.64	46	15 915	0.84	208	15

注： $U=Q/(BH)$ ， Q 为流量， $m^3 \cdot s^{-1}$ ； B 为水槽宽度， B 为 30 cm。

Note: $U=Q/(BH)$ ， Q represents flow discharge, $m^3 \cdot s^{-1}$ ； B represents the width of flume and B is 30 cm.

2 结果与分析

2.1 动力学参数特征

2.1.1 水深

表 2 所示为本试验沿程水位的变化特征。由表可见

在距入口 2.5 m 之前，水位逐渐下降，随后保持稳定；在 10.5 m，受尾门的影响，水位下降。总体而言，沿程大部分的水位保持稳定，试验段的水流可认为是恒定均匀薄层流。平均水位的值由水位计 3~5 平均所得，代表试验段处的水位值，与表 1 一致。

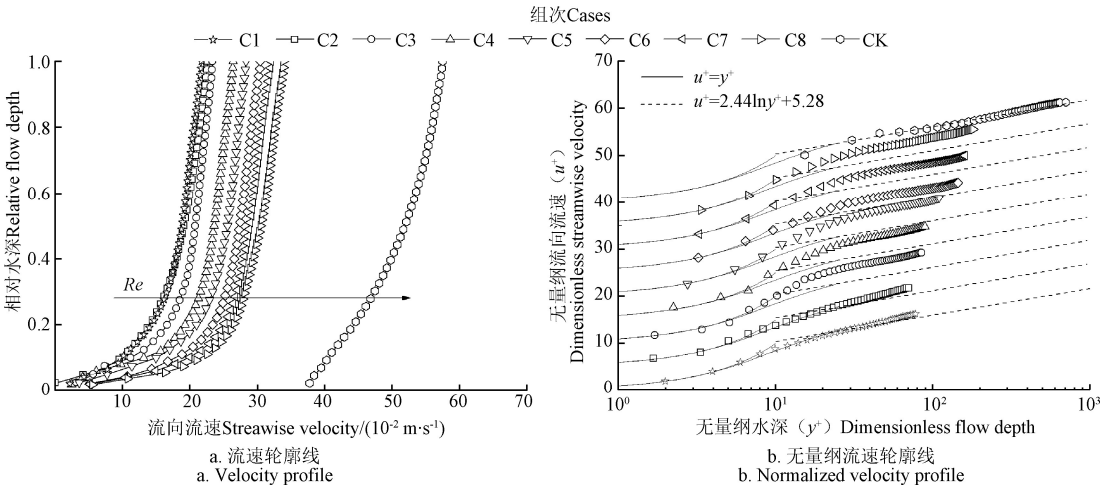
表 2 超声波水位计测量的沿程水深变化
Table 2 Variation of flow depth measured by ultrasonic-level transmitters along flume

组次 Cases	距入口不同距离的水位计测定的水深 Flow depth measured by level gauge located at different positions to entrance/cm						平均水深 Flow depth/cm
	0.5 m	2.5 m	4.5 m	6.5 m	8.5 m	10.5 m	
C1	0.52	0.50	0.49	0.49	0.49	0.48	0.49
C2	0.59	0.56	0.55	0.55	0.55	0.53	0.55
C3	0.70	0.68	0.67	0.66	0.66	0.65	0.66
C4	0.81	0.78	0.76	0.76	0.76	0.74	0.76
C5	0.89	0.85	0.84	0.83	0.83	0.81	0.83
C6	1.00	0.95	0.94	0.94	0.94	0.91	0.94
C7	1.08	1.04	1.03	1.02	1.02	1.00	1.02
C8	1.18	1.13	1.12	1.10	1.10	1.07	1.10
CK	3.40	3.28	3.22	3.20	3.20	3.11	3.20

2.1.2 流 速

图 3 所示为各组次时均流速分布，图 3a 为实际的流速轮廓线，从 C1 至 CK 组次， Re 增加，流速剖面也逐渐向右移动，流速变大，同时 C1 至 CK 组次的流速曲线也越来越平缓。为进一步说明时均流速分布的规律，图 3b 所示为无量纲化的流速轮廓线分布图，通过式 (2) 计算出摩阻流速 u_* 后得到 u^+ 和 y^+ 。为清晰展示各组次的分布规律，图中除 C1 外每组依次向上移动 5 个单位。图中的

线段表示了 Nezu 等^[1]得到的深水明渠紊流流速的理论曲线，分别为黏性底层、过渡区和对数区。CK 的分布与 Nezu 等^[1]得到的分布规律较为吻合，表明本次试验的可靠性及准确性。不论薄层流还是深水明渠紊流，在靠近床面时，流速的分布均满足 $u^+=y^+$ ，称之为黏性底层^[1,20]。由图 3b 所示薄层流黏性底层的范围为 $y^+<10$ 。然而，从过渡区开始，薄层流 u^+ 与深水明渠紊流的理论曲线逐渐偏离，不再满足深水明渠水流中流速的分布规律。



注： Re 为雷诺数，黑色箭头表示 Re 增加的方向。
Note: Re is Reynold number and black arrow indicates the increase trend of Re .

图 3 时均流速分布
Fig.3 Distribution of time-average velocity

Nezu 等^[1]得到当 $y^+>30$ 时，深水明渠紊流的对数分布规律为 $u^+=2.42 \ln y^+ + 5.28$ ，卡门常数 $\kappa=0.412$ 。当 $y^+>30$ ，本试验 CK 组次部分数据点满足深水明渠紊流的对数律，本试验薄层流 C1~C2 组次部分数据点满足深水明渠紊流的对数分布规律，而 C3~C8 的数据点并不满足该规律，甚至有较大的偏离。导致该现象的原因为：1) 由于薄层流与深水明渠紊流具有差异，因此其对数律的分布范围以及 κ 的取值可能与深水明渠紊流的不同，导致本试验的数据点不满足 Nezu 等^[1]得到的规律；2) 薄层流水深较浅，床面与水面之间的间距较小，因此尚不清晰是否存在受黏性和水面影响都不显著的区域，从而不能确定是否存在严格满足对数律的区域。

2.1.3 紊动强度和雷诺应力

图 4 表示了流向和垂向的紊动强度分布。图 4 中的实线表示钟强等^[17]利用 PIV 在深水明渠紊流中得到的实测数据。本试验中 CK 组次和实线较好吻合再次表明此次测量可靠。观察流向和垂向无量纲紊动强度的特征，薄层流的无量纲流向紊动强度大于明渠紊流，而薄层流的无量纲垂向紊动强度小于明渠紊流，随着水深的增加，薄层流靠近水面部分曲线与深水明渠紊流的曲线逐步重合。可以预见，随着水深进一步的增加，薄层流曲线靠近床面的部分也会逐渐与深水明渠紊流的重合，此时，薄层流已发展为深水明渠紊流^[20]。图 5 表示了无量纲雷诺应力的分布。Nezu 等^[1]的研究表明，靠近床面部分流

体受黏性作用显著，而当远离床面的流体其无量纲雷诺应力会与图中实线重合，此时流体受黏性作用微弱。由图5可见，水深较浅时，少部分数据与实线重合，受黏性作用显著部分的流体较多；随着水深的增加，大部分

数据与实线重合，受黏性作用显著的流体占比显著减小，表明随着水深的增加，受黏性力影响的范围越来越小。随着水深的进一步增加，最终拐点与深水明渠水流的一致，拐点位置在 $y/H \approx 0.2$ [11,17,27-28]。

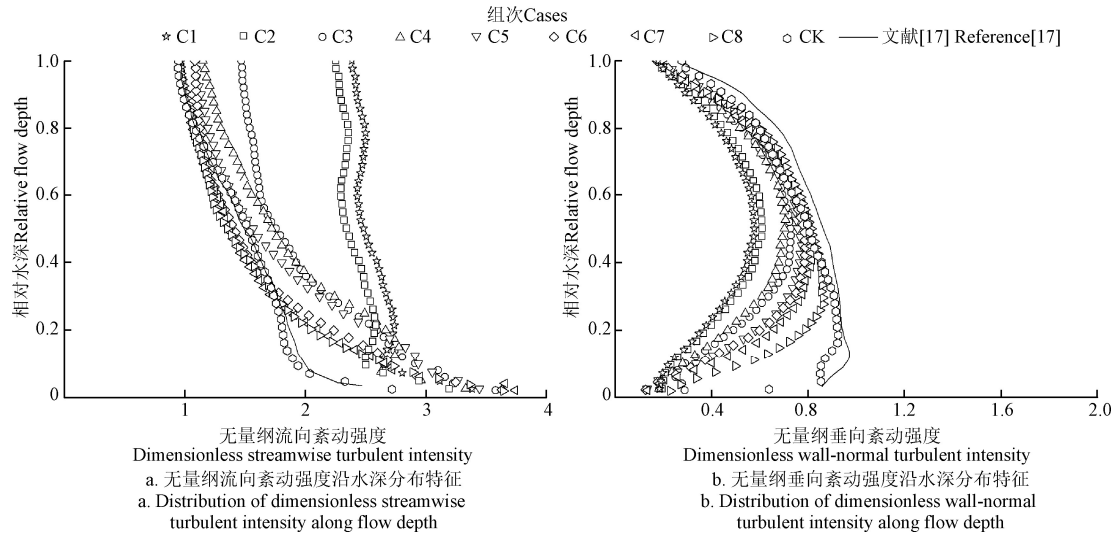


图4 紊动强度沿水深分布

Fig.4 Distribution of turbulent intensity along flow depth

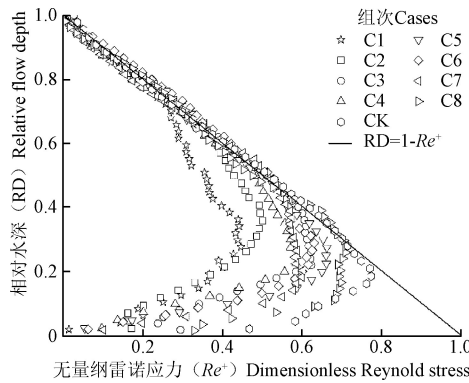


图5 无量纲雷诺应力沿水深的分布

Fig.5 Distribution of dimensionless Reynolds stress along flow depth

2.2 诊断函数

为研究薄层流对数区的特征，本研究采用诊断函数以检验薄层流是否存在对数律区域，以及对数律的分布范围。图6所示为所有组次的诊断函数随 y^+ 的分布特征，图7所示为 ε 与相对水深 y/H 间的变化关系。图中虚线表示 Nezu 等 [11] 得出的深水明渠紊流卡门常数 $\kappa=0.412$ 。曲线表示钟强等 [16] 利用 PIV 在深水明渠紊流中的研究结果，并标示了其雷诺数 Re 的数值。对于深水明渠紊流， ε 呈现出减小至最小值后逐渐增加至极大值，后缓慢下降至极小值，最后在水面附近急速攀升。对比本研究 CK 组次和钟强等 [16] 的研究结果，CK 组次与其 $Re=15\,895$ 的曲线较为吻合，因两组次 Re 的数值接近。通过对比图6i中3条深水明渠紊流的曲线，表明随着 Re 的增加 ε 曲线的极大值与极小值之间的线段逐渐趋于平缓。钟强等 [16] 指出随着 Re 的增加， ε 曲线中极大值之前的曲线和极小值之后的曲线会被逐渐压缩，极大值与极小值之间曲线被逐

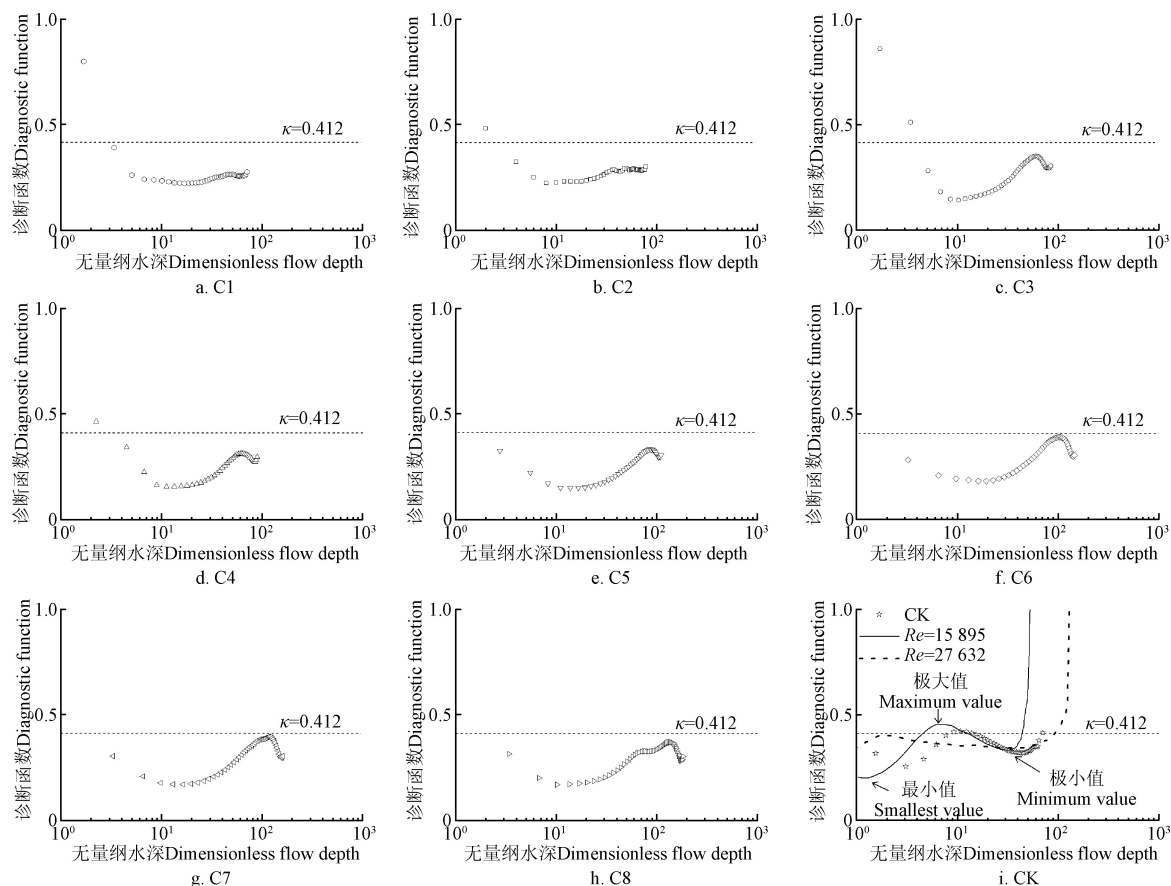
渐拉伸，虽然在他们的试验中未出现严格的对数区，但其推测当 Re 足够大时，极大值与极小值之间曲线将会水平，即出现了严格的对数区，且 κ 在 $[0.334, 0.415]$ 范围内，对数区的范围在 $y^+ > 76$ ，且 $y/H < 0.5$ 。

总体而言，本试验条件下的薄层流 C1~C8 组次的 $\kappa < 0.412$ ，且其 ε 曲线没有出现严格的水平段，表明在本次薄层流试验条件下未出现严格意义的对数区。此外，当水深足够大已发展为明渠紊流的 CK 组次时也未出现严格的对数区，表明薄层流条件下并不会出现严格的对数区。然而，值得注意的是 C1 和 C2 的 ε 曲线，虽然没有严格的水平段，但当 $y^+ > 10$ 时，曲线段的斜率较小，近似为一条水平直线，该段基本上满足对数律，C1 的卡门常数 κ 在 $[0.22, 0.27]$ 范围内，均值为 0.25；而 C2 的 κ 在 $[0.23, 0.30]$ 范围内，均值为 0.27。总体而言，当水深较浅时（本试验条件下 $H \leq 0.53$ cm）， $y^+ > 10$ 段流速基本满足对数律，其 κ 在 $[0.2, 0.3]$ 范围内。出现该对数区的原因当水深极为浅薄时，远离床面区域受床面黏性作用的影响较小，同时惯性作用的影响也微弱，导致在远离床面的流体中存在这样的区域，即受黏性和惯性作用影响都很微弱，其流速分布满足对数律，但其 κ 显著小于深水明渠紊流中的 κ 。

当 $H > 0.53$ cm，随着 H 和 Re 的增加，惯性带来的作用逐渐凸显，C3~C8 的 ε 曲线不再近似水平而出现波动。C3~C8 的 ε 曲线同样呈现了最小值，极大值，极小值，与深水明渠紊流 ε 曲线的变化趋势类似。C3~C8 的 ε 曲线先减少至 $y^+ \approx 10$ 达到最小值，之后逐渐上升至 $y/H \approx 0.75$ 处达极大值，随后又逐渐下降至 $y/H \approx 0.95$ 处达极小值，最后在水面附近有上升的趋势。在达到极大值之前，C3~C8 的 ε 曲线变化相似，在该区域均由黏性主导，从而服

从相同的规律^[16]。而极大值到极小值之间的曲线段具有差异,该段受惯性力影响,若惯性力的作用较大则受惯性力影响的范围越广。图 7 所示从 C3~CK 极大值的相

对位置逐渐靠近床面,表明随着 H 和 Re 的增加,惯性力增强,受惯性力影响的范围越来越大而受黏性力影响的范围越来越小,呼应了图 5 展示的结果。



注: κ 为卡门常数。下同。

Note: κ is Karman constant. The same below.

图 6 诊断函数与无量纲水深的关系

Fig.6 Relationship between diagnostic function and dimensionless flow depth

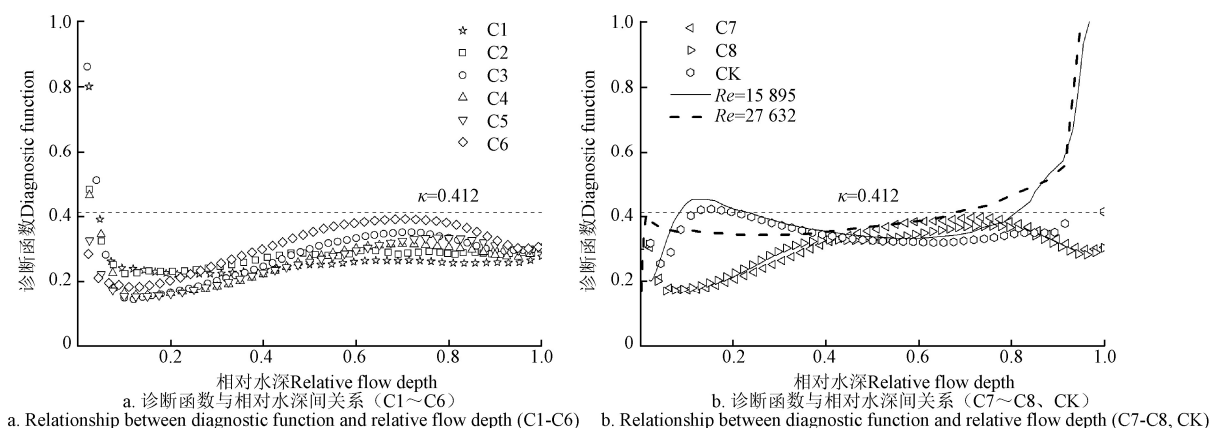


图 7 诊断函数与相对水深间的关系

Fig.7 Relationship between diagnostic function and relative flow depth

2.3 卡门常数和数区范围

虽从理论上无严格的对数区,但为指导实际的工程计算及应用,需找出较为符合对数律的区域作为对数区。钟强等^[16]和 Lozano-Duran 等^[24]认为随着 Re 的增加, ε 曲线中极大值与极小值之间的曲线逐渐趋于平缓,当 Re 足够大时,该段的斜率为 0,此时该区域为严格意义的对

数区。因此,若允许存在一定的误差范围(在本试验条件下极大值和极小值之间的 $\varepsilon \sim y^+$ 斜率最大达 -0.003, $\varepsilon \sim y/H$ 最大达 -0.527),则可以将 ε 曲线中极大值和极小值之间的区域作为对数区。因此本试验研究了薄层流 ε 的极大值、极小值及其范围随着 Re 的变化趋势,结果分别绘于图 8 和图 9。图中未绘制 C1 和 C2 的数据,前

述研究表明,对于 C1 和 C2,当 $y^+ > 10$ 时, ε 曲线近似水平,满足对数律,并且 κ 在 $[0.2, 0.3]$ 范围内。图 8 所示为 C3~CK 极大值和极小值的 κ 值随 Re 的变化规律,图中的实线和虚线分别为钟强等^[16]得到的深水明渠紊流极大值和极小值处的 κ 值。

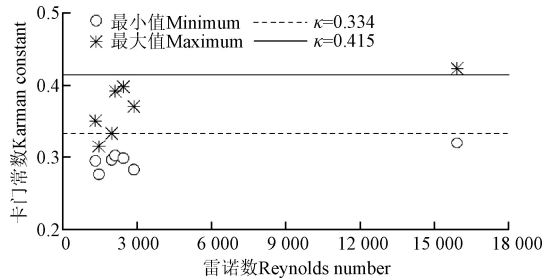


图 8 卡门常数极值与雷诺数关系

Fig.8 Relationship between extremum Karman constant and Reynolds number

图 8 表明薄层流的 $\kappa > 0.25$, 但小于深水明渠紊流的 $\kappa = 0.415$, 薄层流极大值处的 κ_{\max} 和极小值处的 κ_{\min} 随着雷诺数的增加呈现出增加的趋势。秦荣昱等^[29-30]分析得出 κ 实质上是反映流速分布变化的参数, κ 越大, 则流速分布越均匀; 反之, κ 越小, 流速分布越不均匀。结合图 3a 所示的流速分布曲线, 在薄层流条件下, 其 Re 较小, 流速质点之间的碰撞较小导致动量的交换较小, 流速分布越不均匀, 因此 κ 较小; 而随着 Re 的增加, 流体之间的碰撞越激烈, 导致相互之间的动量充分交换, 流体质点间流速趋于一致, 则流速分布越均匀, 因此 κ 也逐渐变大。前人对深水明渠紊流中 κ 的研究表明, κ 是一个不随 Re 变化的常数^[1,4,6,26,31], 这说明随着 Re 的增加, 当水

流发展成为深水明渠紊流时, 流体质点间进行了充分的动量交换, 此时 Re 的增加已不能进一步引起流体质点间的动量交换, 因此 κ 不随 Re 变化。

将每组次 κ_{\max} 所处的 y^+ 和 y/H 的值作为对数区下边界, 而 κ_{\min} 所处的 y^+ 和 y/H 的值作为对数区上边界 (从图 6 和图 7 中获得), 结果如图 9 所示, 以探讨对数区的适用范围。如图 9a 所示, 对于薄层流而言, 上边界的 y^+ 随着雷诺数的增加而增加, 表明随着水深的增加, 对数区上边界距床面的距离越来越远。而下边界的 y^+ 随着 Re 增加而增加, 距床面越来越远, 但当 Re 发展到一定程度时, 下边界的 y^+ 又随着 Re 的增加而减少, 最终稳定在 $y^+ \approx 76$ 。该现象的原因是随着 H 的增加, 黏性力的影响范围扩大, 同时, Re 增加也会导致惯性力的作用逐渐占据主导, 当 Re 增加到一定程度时, 黏性力影响的范围被压缩, 导致对数区下边界逐渐靠近床面, 最终会趋于稳定。如图 9b 表明对数区上边界和下边界的 y/H 随着 Re 增加而变小, 表明惯性力的作用大则受惯性力影响的范围越广, 但对数区的影响范围也会越来越大 (即极大值和极小值间的曲线), 例如在 C3 组次时对数区影响范围约为 20%, C8 约为 25%, 而 CK 约为 50%。当薄层流发展为深水明渠紊流后其上边界将会稳定在 $y/H \approx 0.5$ 。一般而言, 下边界用 y^+ 的值描述, 而上边界用 y/H 的值描述。钟强等^[16]认为深水明渠紊流对数律的范围不随着 Re 而变化, 图 9 中的虚线和实线分别表示他们在深水明渠紊流中的对数区范围, $y^+ > 76$, $y/H < 0.5$ 。相较于深水明渠紊流, 薄层流下边界 y^+ 的值较大且上边界 y/H 也较大。然而, 薄层流对数区的范围并非稳定, 而是随着 Re 的增加, 下边界 y^+ 先增大后逐渐减小, 上边界 y/H 则逐渐减小。

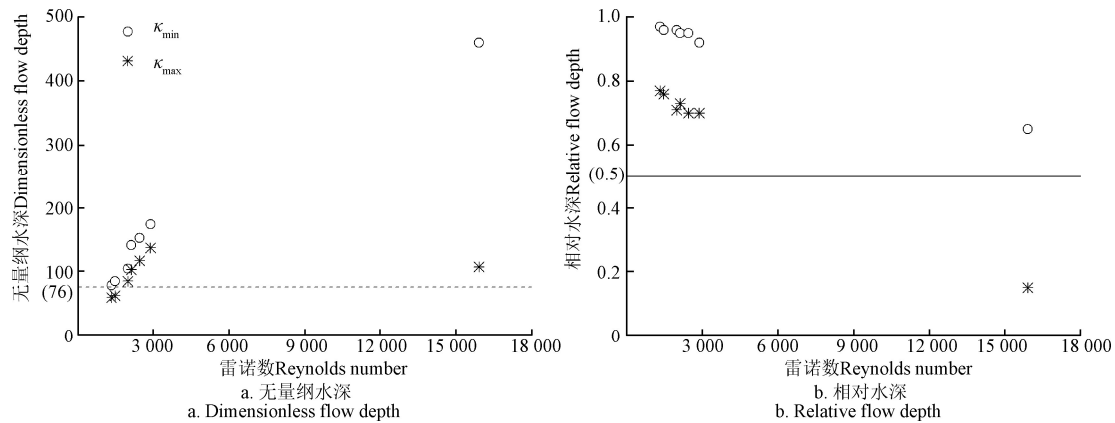


图 9 卡门常数极值点坐标与雷诺数关系

Fig.9 Relationship between coordinates of extremum Karman constant and Reynolds number

3 结 论

通过分辨率高达 64 像素/mm 的粒子图像测速 (Particle Image Velocimetry, PIV) 技术, 测量了光滑床面上 8 组薄层流及 1 组深水明渠紊流从床面至水面的流速分布, 并分析了流速分布特征、紊动强度和雷诺应力的特征, 随后基于诊断函数研究了薄层流流速分布是否满足对数律, 计算了卡门常数的取值和对数区的适用范

围, 得到以下结论:

1) 无量纲水深 > 30 , 本试验薄层流的无量纲流向流速从过渡区开始逐渐偏离深水明渠紊流中理论曲线。薄层流的流向紊动强度大于深水明渠紊流, 而垂向紊动强度小于深水明渠紊流, 随着水深的增加, 紊动强度靠近水面部分与深水明渠紊流的曲线逐步重合。雷诺应力的特征表明, 随着水深的增加, 受黏性力影响的范围越来越小。

2) 通过分析诊断函数的变化特征, 表明薄层流条件下不会出现严格的水平段, 即不会出现严格的对数区。然而, 在水深极浅时(水深 ≤ 0.53 cm), 无量纲水深 >10 之后的诊断函数曲线近似水平, 基本满足对数律, 卡门常数在 $0.2\sim 0.3$ 范围内。当水深 >0.53 cm后, 无量纲水深 >10 区域的薄层流诊断函数出现波动, 并呈现出先减少至最小值后增加到极大值, 随后再减少到极小值, 接近水面时上升。

3) 虽然薄层流不存在严格的对数区, 但若允许诊断函数有一定的倾斜, 以极大值与极小值之间的范围为对数区, 薄层流极大值和极小值的卡门常数随着雷诺数的增加而增加, 并不存在一个恒定的卡门常数值。此外, 对数区的范围并非稳定, 而是随着雷诺数的增加下边界无量纲水深先增大后逐渐减小, 上边界相对水深则逐渐减小。

综上, 利用 PIV 能测量床面至水面的流场, 有助于从水动力学的角度研究薄层流的机理机制。本研究利用 PIV 测量了薄层流从床面至水面的流速分布, 基于诊断函数判断了薄层流流速是否满足对数律, 并对卡门常数和其对数律适用范围进行探讨, 可为薄层流理论研究提供支撑。然而, 本试验设计的水流条件为均匀恒定流, 实际上坡面漫流形成的薄层流因沿程的复杂性很难形成均匀恒定流, 后续研究应使模拟的水流条件与实际更加贴合, 研究流场、流速、紊动强度等动力学参数沿程的变化特征, 以期更好地指导实际应用。

[参 考 文 献]

- [1] Nezu I, Rodi W. Open-channel flow measurements with a Laser Doppler Anemometer[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1986, 112(5): 335-355.
- [2] Osterlund J M, Johansson A V, Nagib H M, et al. A note on the overlap region in turbulent layers[J]. *Physics of Fluids*, 2000, 12(1): 1-4.
- [3] Pope S B. *Turbulent Flows*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- [4] Cardoso A H, Graf W H, Gust G. Uniform flow in a smooth open channel[J]. *Journal of Hydraulic Research*, 1989, 27(5): 603-616.
- [5] 王殿常, 王兴奎, 李丹勋. 明渠时均流速分布公式对比及影响因素分析[J]. *泥沙研究*, 1998(3): 86-90.
Wang Changdian, Wang Xingkui, Li Danxun. Comparison of velocity distribution formulas and analysis of influencing factors in open channel flow[J]. *Journal of Sediment Research*, 1998(3): 86-90. (in Chinese with English abstract)
- [6] 刘春晶, 李丹勋, 王兴奎. 明渠均匀流的摩阻流速及流速分布[J]. *水利学报*, 2005, 36(8): 950-955.
Liu Chunjing, Li Danxun, Wang Xingkui. Experimental study on friction velocity and velocity profile of open channel flow[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2005, 36(8): 950-955. (in Chinese with English abstract)
- [7] Roussinova V, Biswas N, Balachandar R. Revisiting turbulence in smooth uniform open channel flow[J]. *Journal of Hydraulic Research*, 2008, 46(S1): 36-48.
- [8] Sukhodolov A, Thiele M, Bungartz H. Turbulence structure in a river reach with sand bed[J]. *Water Resources Research*, 1998, 34(5): 1317-1334.
- [9] Dupuis V, Sébastien P, Céline B, et al. Combined effects of bed friction and emergent cylinder drag in open channel flow[J]. *Environmental Fluid Mechanics*, 2018, 16: 1173-1193.
- [10] Gautam P, Eldho T I, Mazumder B S, et al. Experimental study of flow and turbulence characteristics around simple and complex piers using PIV[J]. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2019, 100: 193-206.
- [11] 张宽地, 王光谦, 孙晓敏, 等. 坡面薄层水流水动力学特性试验[J]. *农业工程学报*, 2014, 30(15): 182-189.
Zhang Kuandi, Wang Guangqian, Sun Xiaomin, et al. Experimental on hydraulic characteristics of shallow open channel flow on slope[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, 2014, 30(15): 182-189. (in Chinese with English abstract)
- [12] Wang C, Wang B, Whang Y, et al. Impact of near-surface hydraulic gradient on the interrill erosion process[J]. *European Journal of Soil Science*, 2020, 71: 598-614.
- [13] Li Z, Zhang G, Geng R, et al. Spatial heterogeneity of soil detachment capacity by overland flow at a hillslope with ephemeral gullies on the Loess Plateau[J]. *Geomorphology*, 2015, 248: 264-272.
- [14] Li G, Abrahams A D. Effect of saltating sediment load on the determination of the mean velocity of overland flow[J]. *Water Resources Research*, 1997, 33(2): 341-347.
- [15] 安翼, 刘青泉. 坡面薄层水流的流速分布特征分析[C]//第十一届全国水动力学学术会议暨第二十四届全国水动力学研讨会并周培源诞辰 110 周年纪念大会文集(上册). 北京: 海洋出版社, 2012: 162-167.
- [16] 钟强, 郑枫川, 杨宇晨, 等. 明渠湍流对数律的诊断函数分析[J]. *清华大学学报: 自然科学版*, 2019, 59(12): 999-1005.
Zhong Qiang, Zheng Fengchuan, Yang Yuchen, et al. Diagnostic function analysis of the logarithmic law in open channel turbulence[J]. *Journal of Tsinghua University: Science and Technology*, 2019, 59(12): 999-1005. (in Chinese with English abstract)
- [17] 钟强, 王兴奎, 苗蔚, 等. 高分辨率粒子示踪测速技术在光滑明渠紊流黏性底层测量中的应用[J]. *水利学报*, 2014, 45(5): 513-520.
Zhong Qiang, Wang Xingkui, Miao Wei, et al. High resolution PTV system and its application in the measurement in viscous sub-layer in smooth open channel flow[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2014, 45(5): 513-520. (in Chinese with English abstract)
- [18] 杨坪坪, 张会兰, 王云琦, 等. 低柱体雷诺数下柱体上游薄层流马蹄涡特征研究[J]. *工程科学与技术*, 2019, 51(1): 52-59.
Yang Pingping, Zhang Huilan, Wang Yunqi, et al. Characteristics of horseshoe vortex upstream of a cylinder in shallow water with low cylinder Reynolds number[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2019, 51(1): 52-59. (in Chinese with English abstract)
- [19] Yang P, Zhang H, Wang Y, et al. Hydrodynamic characteristics in a sheet flow upstream water flow of a circular cylinder[J]. *Physics of Fluids*, 2019, 31(12): 127106.
- [20] Yang P, Zhang H, Wang Y, et al. Overland flow velocities measured using a high-resolution particle image velocimetry system[J]. *Journal of Hydrology*, 2020, 590: 125225.
- [21] 杨坪坪, 张会兰, 王云琦, 等. 基于粒子图像测速的坡面流水动力学特性[J]. *农业工程学报*, 2020, 36(17): 115-124.
Yang Pingping, Zhang Huilan, Wang Yunqi, et al. Hydrodynamic characteristics of overland flow based on particle image velocimetry[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, 2020, 36(17): 115-124. (in Chinese with English abstract)
- [22] Zanon E S, Durst F, Nagib H. Evaluating the law of the wall in two-dimensional fully developed turbulent channel flows[J]. *Physics of Fluids*, 2003, 15(10): 3079-3089.

- [23] Smits A J, McKeon B J, Marusic I. High-Reynolds number wall turbulence[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2011, 43: 353-375.
- [24] Lozano-Duran A, Jimenez J. Effect of the computational domain on direct simulations of turbulent channels up to $Re_\tau=4200$ [J]. *Physics of Fluids*, 2014, 26(1): 11702.
- [25] Panco R B, DeMauro E P. Measurements of a Mach 3.4 turbulent boundary layer using stereoscopic particle image velocimetry[J]. *Experiments in Fluids*, 2020, 61(4): 1-12.
- [26] Nezu I. Open-channel flow turbulence and its research prospect in the 21st century[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2005, 131(4): 229-246.
- [27] Chen Q, Qi M, Zhong Q, et al. Experimental study on the multimodal dynamics of the turbulent horseshoe vortex system around a circular cylinder[J]. *Physics of Fluids*, 2017, 29(1): 015106.
- [28] 钟强. 明渠紊流不同尺度相干结构实验研究[D]. 北京: 清华大学, 2014.
- [29] 秦荣昱, 王崇浩, 刘淑杰. 动床水流卡门常数 K 的物理意义及其应用[J]. *水利学报*, 1995, 6(1): 8-18.
- Qin Rongyu, Wang Chonghao, Liu Shujie. Physical significances and applications of Karman coefficient of flow on movable river bed[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1995, 6(1): 8-18. (in Chinese with English abstract)
- [30] 柳小珊, 卢金友, 廖小永, 等. 卡门常数研究现状及存在的问题[J]. *长江科学院院报*, 2014, 31(6): 1-6.
- Liu Xiaoshan, Lu Jinyou, Liao Xiaoyong, et al. Research status and existing problems of Karman constant[J]. *Journal of Yangtze River Scientific Research Institute*, 2014, 31(6): 1-6. (in Chinese with English abstract)
- [31] Chow V T. *Open-channel Hydraulics*[M]. New York, USA: McGraw-Hill, 1959: 182-192.

Logarithmic law of shallow water flow by using diagnostic function

Yang Pingping^{1,2}, Zhang Yushan^{1,2}, Li Rui^{1,2*}, Zhang Huilan^{3,4}, Wang Yunqi^{3,4}

(1. School of Karst Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China; 2. State Engineering Technology Institute for Karst Desertification Control, Guiyang 550001, China; 3. Three-Gorges Area (Chongqing) Forest Ecosystem Research Station of Ministry of Education, School of Soil and Water Conservation, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China; 4. Chongqing Jinyun Forest Eco-System Research Station, School of Soil and Water Conservation, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

Abstract: Shallow water flow is a special type of open channel flow, where the fluid behaves with a free surface in a canal. The flow depth of shallow water flow is extremely thin, and even reaches several millimeters. At present, there is no obvious evidence that the logarithmic theory is suitable for shallow water flow, even though it is widely used to describe velocity profile for open channel flow. The reason is that the viscous and inertia force exert no significant influences on shallow water flow, due to extremely thin flow depth. It is necessary to clarify the presence of the region without influenced by viscous and inertia force. The present study aims to analyze the velocity characteristics of shallow water flow, thereby to verify logarithmic law using diagnostic function. The Particle Image Velocimetry (PIV) with high resolution (64 pixels/mm) was also used to measure flow fields. Eight conditions of shallow water flow were surveyed (flow depth ranged from 0.49 to 1.1 cm and Reynolds number ranged from 835 to 2 877), and a deep-water open channel flow was considered as control group. The statistical parameters were measured, including the velocity distribution from flume bed to free surface, streamwise and wall-normal turbulent intensity. Logarithmic theory was also explored, such as the diagnostic function, Karman constant, and scope of log-law region. Results showed that: 1) From the transition region, dimensionless streamwise velocity of shallow water flow deviated from the logarithmic law, which was used in deep-water open channel flow. The streamwise turbulent intensity of shallow water flow was larger than that of deep-water open channel turbulent flow, while the wall-normal turbulent intensity was smaller than that. The turbulent intensity of two flows gradually overlapped with increasing flow depth. The characteristics of Reynolds stress showed that the region influenced by viscous force became smaller as the flow depth increased. 2) There weren't strict horizontal lines in the diagnostic function curves, implying that there was no strict log-law region in shallow water flow. However, an approximate line was obtained in the diagnostic function curves for the extremely shallow depth (flow depth not less than 0.53 cm), when the dimensionless flow depth was larger than 10, indicating the logarithmic law was basically suitable for this region. Simultaneously, the Karman constant was at the range of 0.2 and 0.3. There was a region without influenced by viscous force and inertia force away from flume bed, due to the weakness of inertia force. In the flow depth larger than 0.53 cm, the diagnostic function curves became fluctuate due to the inertia force, particularly in the regions with dimensionless flow depth larger than 10. An upward trend occurred near the free surface, where firstly decreased and then increased to the maximum, finally decreased to the minimum. 3) The log-law region appeared in the scope between the maximum and minimum for the actual application of shallow water flow, although there was no strict log-law region for a certain tilt of diagnostic function. The extreme value of Karman constant increased with the increasing Reynolds number, indicating no stable Karman constant for shallow water flow. In addition, the scope of log-law region was not stable. As the Reynolds number increased, the scope of log-law region would be expanded. This present study can be benefit to further understand the characteristics of shallow water flow, thereby for the theoretical investigation of shallow water flow using particle image velocimetry.

Keywords: flow velocity; particle image velocimetry; canals; shallow water flow; Karman constant; diagnostic function; logarithmic law