

# 基于异速生长法则的油茶树主干自然频率经验公式推导及应用

张诗怡<sup>1</sup>, 唐乐为<sup>1,2\*</sup>, 吴明亮<sup>1,2</sup>, 李正超<sup>1</sup>, 张慧宇<sup>1</sup>

(1. 湖南农业大学机电工程学院, 长沙 410128; 2. 特色油料作物(油茶)全程机械化科研基地, 长沙 410128)

**摘要:** 为克服油茶果人工采摘率低, 该研究根据油茶树木合轴分枝生长方式, 结合树体异速生长法则, 建立油茶分形树体理想模型, 提取二分叉基本单元。基于经典质量-弹簧分析方法, 建立3种不同质点分布的二分叉基本单元动力学模型, 推导一阶自然频率计算表达式。以湖南省华鑫油茶品种为应用实例, 通过测量油茶树形态学参数, 辨识面积缩减系数和异速生长系数, 采用水浸法和三点弯曲试验分别测量油茶树枝密度和弯曲弹性模量。计算不同分枝角度下二分叉基本单元的一阶自然频率理论值。创建二分叉基本单元 ANSYS 有限元仿真模型, 通过模态分析得到自然频率仿真值, 质量均分在刚性杆两端的动力学模型的自然频率 ANSYS 仿真值与理论计算值较接近, 平均相对误差为 7.3%。基于带端部质点的悬臂梁一阶自然频率计算公式, 采用参数辨识方法推导二分叉基本单元一阶自然频率经验公式, 自然频率的经验公式计算值与仿真值最大误差仅为 0.41%, 验证了经验公式的准确性。研究结果可为油茶果振动式采摘装置的激振参数设置供理论依据。

**关键词:** 频率; 振动; 油茶; 异速生长法则; 经验公式; 二分叉基本单元

doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.202403204

中图分类号: S718.42

文献标志码: A

文章编号: 1002-6819(2024)-18-0032-10

张诗怡, 唐乐为, 吴明亮, 等. 基于异速生长法则的油茶树主干自然频率经验公式推导及应用[J]. 农业工程学报, 2024, 40(18): 32-41. doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.202403204 <http://www.tcsae.org>  
ZHANG Shiyi, TANG Lewei, WU Mingliang, et al. Empirical formula for the natural frequency of *Camellia oleifera* trunk using allometric growth[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE), 2024, 40(18): 32-41. (in Chinese with English abstract) doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.202403204 <http://www.tcsae.org>

## 0 引言

油茶是中国特有的木本油料树种, 全球 95% 以上油茶种植在中国南方丘陵山区, 发展油茶产业是增加国内食用油产能的重要途径<sup>[1-2]</sup>。茶油被纳入国家食用油安全战略, 并逐渐形成千亿级经济产值规模<sup>[3-4]</sup>。2023 年林草局和发改委《加快油茶产业发展三年行动方案(2023-2025 年)》, 到 2025 年底国内油茶种植规划面积超过 9 000 万亩, 茶油产能达到 200 万 t<sup>[5]</sup>。因为油茶果熟期季节性强、采收时间短, 并且油茶果熟期与油茶盛花期重合, 所以目前油茶果采收主要依赖人工劳动。油茶果人工采收属于劳动力密集型作业, 具有采收效率低、劳动强度大的缺点<sup>[6-7]</sup>。现有林果机械化采摘的一种有效方式为振动式采摘<sup>[8-10]</sup>。研究油茶树木模型及动力学特性将为油茶果振动式机械采摘装置设计及优化提供理论依据。

树体动力学特性研究常用方法包含动力学建模<sup>[11-14]</sup>和有限元仿真分析<sup>[15-17]</sup>及田间试验分析<sup>[18-20]</sup>。LANG<sup>[21]</sup>提出了一种单自由度树干-主根的果树动力学模型, 揭示最优激振点位置与振动频率相关。但该模型主要分析树

干、主根与土壤相互作用, 并不适用于油茶果振动采摘频率分析。伍德林等<sup>[22]</sup>建立了五自由度油茶树的质量-弹簧-阻尼动力学模型, 分析油茶树三级枝间的能量传递规律。将树体形态学测量参数转化为树体动力学模型参数, 并与实际树体的振动频率响应及位移幅值对比。田间试验结果与模型计算结果的相对误差在 10% 以内, 说明该动力学模型具有较高的准确性, 但未考虑到油茶树生长方式, 导致模型应用对象具有一定的特殊性。翁凌云等<sup>[23]</sup>建立一种 Y 型圆截面楔形梁树枝的果树动力学模型, 在楔形梁顶端添加一个分枝树干和树冠质量等效的质量块, 在受迫振动时对果树模型进行谐响应分析, 但树体简化模型未考虑等效惯量与实际树体差异。CASTRO-GARCÍA 等<sup>[24]</sup>分析激振频率、激振时长和激振频次等激振参数对松子机械化采摘率的影响。该试验研究表明使用两次短时间的连续振动能有效提高采摘效率。许林云等<sup>[25]</sup>结合激光扫描技术与有限元分析法, 用空间六自由度梁单元构建包含果叶的果树有限元三维模型, 自然频率计算结果与实测值基本吻合, 最大相对误差仅为 5.76%。但上述两种试验研究方法适用于单个树体频率研究, 工作效率较低。

综上所述, 国内外学者正深入研究树体动力学特性, 面向不同种类树体提出理论数学模型及自然频率分析方法, 但现有模型无法预估油茶树自然频率。本文以油茶树体作为研究对象, 根据合轴分枝生长方式提取油茶树二分叉基本单元, 采用质量-弹簧模型推导三类树体动力

收稿日期: 2024-03-27 修订日期: 2024-06-06

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(52305020); 国家资助博士后研究人员计划(GZC20230776); 博士后科学基金面上项目(2023M741142)  
作者简介: 张诗怡, 研究方向为理想油茶树木建模与分析。

Email: 942108775@qq.com

\*通信作者: 唐乐为, 博士, 讲师, 研究方向为农业机械自动化设计。

Email: tanglw@hunau.edu.cn

学模型，基于端点带质点的悬臂梁一阶自然频率计算公式，采用参数辨识方法推导二分叉基本单元主干一阶自然频率计算经验公式，通过样本振动试验验证经验公式的准确性，以期为油茶果振动式采摘装置的激振参数设置提供理论依据。

## 1 油茶理想分形树体模型

### 1.1 分枝方式

不同种类树体在生长过程中常遵循特有分枝方式<sup>[26]</sup>。根据是否存在明显主干，树体生长分枝方式分为：(1) 单轴分枝 (图 1a)，有单一明显主干，如松树、杨树等；(2) 合轴分枝 (图 1b)，其主干不明显，树枝呈现分叉状态，如柳树、梧桐、槐树和油茶树等。

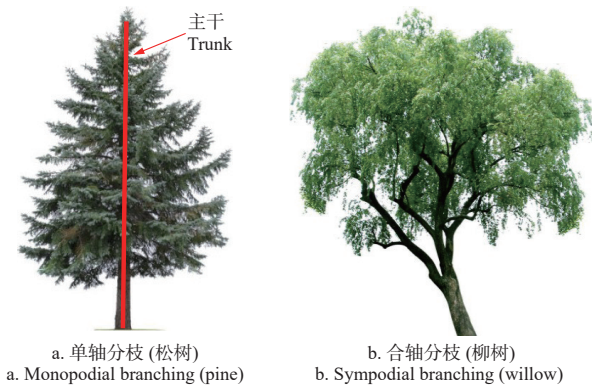


图 1 常见树体分枝方式  
Fig.1 Common tree branching architecture

现有研究发现国内油茶品种树枝生长通常表现为合轴分枝方式<sup>[22]</sup>。因此，定义油茶理想分形树体为一棵由一根圆柱体主干和一系列圆柱体分枝递归组成的无限迭代同向树，其直径和长度满足一定生长规律。在每个分枝节点上，分枝均呈对称生长分布，如图 2 所示。

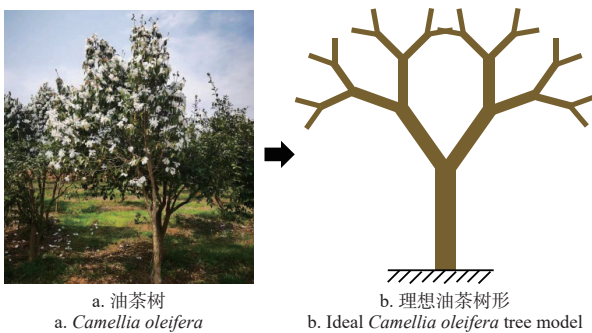


图 2 基于合轴分枝的油茶理想树体模型  
Fig.2 Ideal tree model of *Camellia oleifera* based on sympodial branching architecture

### 1.2 异速生长法则

在理想树体模型中，圆柱体树枝的长度与直径符合生物体异速生长法则<sup>[27]</sup>。树体异速生长法则包括：(1) 面积缩减系数  $\lambda$ ，表示分枝直径减小程度；(2) 异速生长系数  $\beta$ ，描述相邻分枝长度与直径的变化关系。在油茶理想分形树体模型中，相邻圆柱体树枝大小取决于树体品种的分枝节点面积缩减系数  $\lambda$  与异速生长系数  $\beta$ ，

具体关系式如下：

$$\lambda = \left( \frac{d_{k+1}}{d_k} \right)^2 \quad (1)$$

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \left( \frac{l_{k+1}}{l_k} \right)^\beta \quad (2)$$

其中  $d_k$  和  $l_k$  分别为树体第  $k$  段 ( $k=1,2,\dots$ ) 的圆柱体树枝直径和长度。针对树体的异速生长法则，参数取值范围为  $0 < \lambda < 1$ ,  $1 < \beta < 2$ <sup>[27]</sup>。

### 1.3 理想分形树体生成算法

基于合轴分枝方式理想分形树体模型的生成算法为：

(1) 给出树体主干直径  $d_1$  和长度  $l_1$  及分枝夹角；(2) 第一段分枝直径通过式 (1) 面积缩减系数  $\lambda$  得出，表示为  $d_2 = d_1 \sqrt{\lambda}$ ，分枝长度通过主干直径与长度通过式 (2) 异速生长系数  $\beta$  得出，表示为  $l_2 = l_1 \sqrt[\beta]{\lambda}$ ；(3) 分枝夹角保持不变，循环迭代计算下一段分枝形态学参数；(4) 整理确定合轴分枝生长方式的油茶理想分形树体模型，如图 3 所示。

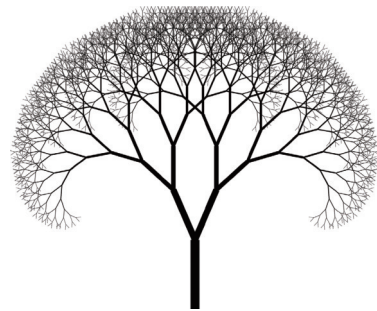


图 3 油茶理想分形树体模型  
Fig.3 Ideal fractal tree model of *Camellia oleifera*

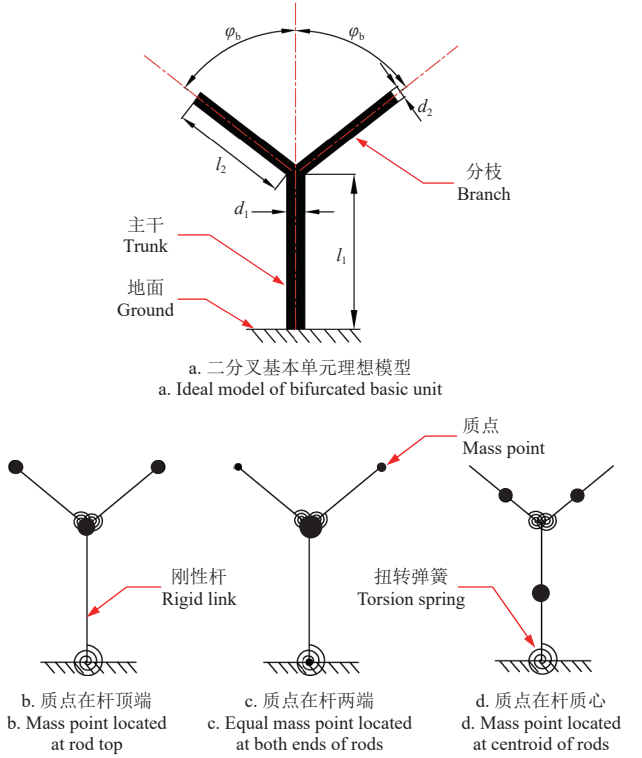
## 2 油茶理想树体动力学建模

油茶树分为主干、主枝、次级枝和三级枝等。油茶理想分形树体模型由二分叉基本单元结构组成。假设油茶树二分叉基本单元由三根圆柱体柔性杆组成，如图 4 所示。长度为  $l_1$  的树体主干一端固定在地面，另一端连接对称生长的两根分枝。分枝长度为  $l_2$ ，每根分枝轴线相对于主干轴夹角为  $\varphi_0$ 。将 3 根柔性杆质量简化为质点，根据分布位置分为 3 种情况研究：(1) 质点均位于杆顶端位置，如图 4b 所示；(2) 质点均分置于杆两端，如图 4c 所示；(3) 质点均位于杆质心位置，如图 4d 所示。

为分析油茶理想分形树体二分叉基本单元的动力学特性，采用拉格朗日动力学方程式 (3) 推导动力学模型。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (3)$$

式中  $\dot{q}$  为质点速度，m/s； $q$  为质点偏离平衡位置的位移量，m； $L=T-V$  为拉格朗日量， $T$  为 3 个质点的动能之和， $V$  为 3 根柔性杆的弹性势能之和； $Q$  为系统外力。本文研究树体二分叉基本单元的自由振动特性，故可忽视系统外力，令  $Q=0$ 。



注:  $l_1$  为主干长度, mm;  $l_2$  为分枝长度, mm;  $d_1$  为主干直径, mm;  $d_2$  为分枝直径, mm;  $\varphi_b$  为分枝与主干轴线夹角, ( $^\circ$ )。  
Note:  $l_1$  is the length of trunk, mm;  $l_2$  is the length of branch, mm;  $d_1$  is the diameter of trunk, mm;  $d_2$  is the diameter of branch, mm;  $\varphi_b$  is the angle between the branch and the main axis, ( $^\circ$ ).

图 4 二分叉基本单元圆柱杆质量分布

Fig.4 Mass point distribution of cylinder links for bifurcated basic unit

对于二分叉基本单元柔性杆, 采用质量-弹簧模型进行分析。柔性杆弹性势能由刚性杆端部节点所在的扭簧弹性势能计算<sup>[28]</sup>, 其扭转弹性系数为

$$k = \frac{3EI}{l} \quad (4)$$

式中  $E$  为弯曲弹性模量, MPa;  $I$  为截面惯性矩,  $\text{mm}^4$ ;  $l$  为刚性杆长度, m。在二分叉基本单元自由振动时, 主干产生偏移角度  $\theta$  和分枝对称运动产生偏移角度  $\varphi$ <sup>[29]</sup>, 如图 5 所示。

### 2.1 质点在刚性杆顶端

如图 5a 所示, 3 个质点的动能之和  $T$  为

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \left[ m_1 l_1^2 + 2m_2 (l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_b + \varphi) + l_2^2) \right] \dot{\theta}^2 + 2m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 \right\} \quad (5)$$

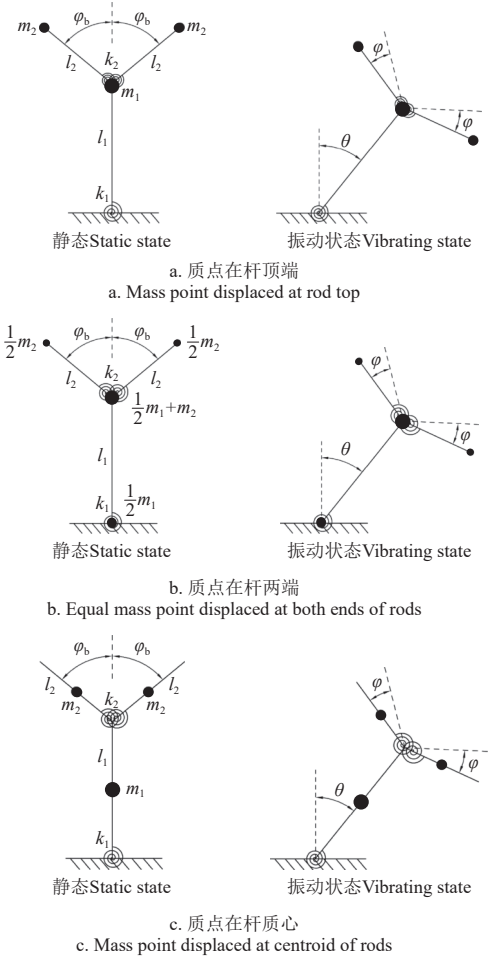
刚性杆端部各扭簧的弹性势能之和  $V$  表示为

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{3EI_1}{l_1} \theta^2 + \frac{6EI_2}{l_2} \varphi^2 \right) \quad (6)$$

式中  $E$  为油茶树枝弯曲弹性模量, MPa;  $I_1$  和  $I_2$  分别为主干和分枝截面惯性矩,  $\text{mm}^4$ 。

将式 (5) ~ (6) 代入式 (3) 得:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \left[ m_1 l_1^2 + 2m_2 (l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_b + \varphi) + l_2^2) \right] \ddot{\theta} - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_b + \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{3EI_1}{l_1} \theta = 0 \quad (7)$$



注:  $m_1$  为主干质量, kg;  $m_2$  为分枝质量, kg;  $\theta$  为主干刚性杆自由振动形成的偏移角度, ( $^\circ$ );  $\varphi$  为分枝刚性杆自由振动对称运动产生的偏移角度, ( $^\circ$ );  $k_1$  为主干扭转弹性系数;  $k_2$  为分枝扭转弹性系数。  
Note:  $m_1$  is the trunk mass, kg;  $m_2$  is the branch mass, kg;  $\theta$  is the angular displacement resulting from the free vibration of trunk rigid rod, ( $^\circ$ );  $\varphi$  is the angular displacement resulting from the free vibration of branch rigid rod, ( $^\circ$ );  $k_1$  is torsional spring coefficient of trunk;  $k_2$  is torsional spring coefficient of branch.

图 5 二分叉基本单元的运动偏移

Fig.5 Kinematic deviation of bifurcated basic unit

定义  $\varepsilon \ll 1$  表示一个极小参数, 令:

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \varepsilon \theta_1(t) + \varepsilon^2 \theta_2(t) + \dots \quad (8)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \dots \quad (9)$$

式中  $t$  为时间, s。为便于公式推导, 式 (8) ~ (9) 采用省略自变量标记。

将式 (8) ~ (9) 代入式 (7), 化简得

$$\left( m_1 l_1^2 + 2m_2 l_1^2 + 4m_2 l_1 l_2 \cos \varphi_b + 2m_2 l_2^2 - 4m_2 \varphi_0 l_1 l_2 \sin \varphi_b \right) \ddot{\theta}_0 - 4m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_0 (\sin \varphi_b + \varphi_0 \cos \varphi_b) \dot{\theta}_0 + \frac{3EI_1}{l_1} \theta_0 = 0 \quad (10)$$

求解二分叉基本单元主干一阶自然频率时, 分枝仅随主干发生偏转, 故令  $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ , 代入式 (10) 得到主干一阶自然频率数学表达式为

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{3EI_1}{l_1 (m_1 l_1^2 + 2m_2 l_1^2 + 4m_2 l_1 l_2 \cos \varphi_b + 2m_2 l_2^2)}}}{2\pi} \quad (11)$$

假定 3 根刚性杆均为圆柱体，则刚性杆质量为

$$m = \rho l \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \quad (12)$$

圆形截面惯性矩为

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (13)$$

式中  $\rho$  为树枝密度， $\text{kg}/\text{m}^3$ ； $d$  为刚性杆直径， $\text{mm}$ 。进一步将式 (1) ~ (2) 和 (12) ~ (13) 代入式 (11) 得：

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{3Ed_1^2}{32\rho l_1^4} \left( \frac{1}{2} + \lambda^{\frac{1}{3p}+1} + 2\lambda^{\frac{1}{3p}+1} \cos\varphi_b + \lambda^{\frac{1}{3p}+1} \right)}}{2\pi} \quad (14)$$

## 2.2 质点在刚性杆两端

如图 5b 所示，假设树体主干底部固结在地面，故不考虑分布在主干底端质点的动能。

计算其他 3 个质点的动能之和为

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{1}{2}m_1 + m_2 \right) l_1^2 + \\ m_2 (l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_b + \varphi) + l_2^2) \\ m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 \end{array} \right] \dot{\theta}^2 + \right\} \quad (15)$$

刚性杆端部扭簧的弹性势能之和不变，同式 (6)。

同理，将式 (6) 和 (15) 代入式 (3)，得到树体主干一阶自然频率数学表达式为

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{3Ed_1^2}{32\rho l_1^4} \left( \frac{1}{4} + \lambda^{\frac{1}{3p}+1} + \lambda^{\frac{1}{3p}+1} \cos\varphi_b + \frac{1}{2} \lambda^{\frac{1}{3p}+1} \right)}}{2\pi} \quad (16)$$

## 2.3 质点在刚性杆质心

如图 5c 所示，3 个质点的动能之和表达式为

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{4}m_1 l_1^2 + \\ m_2 (2l_1^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi_b + \varphi) + \frac{1}{2} l_2^2) \\ \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 \end{array} \right] \dot{\theta}^2 + \right\} \quad (17)$$

同理，将式 (6) 和 (17) 代入式 (3)，得到树体主干一阶自然频率数学表达式为

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{3Ed_1^2}{32\rho l_1^4} \left( \frac{1}{8} + \lambda^{\frac{1}{3p}+1} + \frac{1}{2} \lambda^{\frac{1}{3p}+1} \cos\varphi_b + \frac{1}{4} \lambda^{\frac{1}{3p}+1} \right)}}{2\pi} \quad (18)$$

## 3 油茶树参数测量

在理想分形树体模型中，树体任何分叉子集均与整体分叉树体模型相似。基于自相似分叉定律假设<sup>[27]</sup>，可通过测量部分油茶树枝，计算确定油茶树体的面积缩减系数  $\lambda$  与异速生长系数  $\beta$ 。

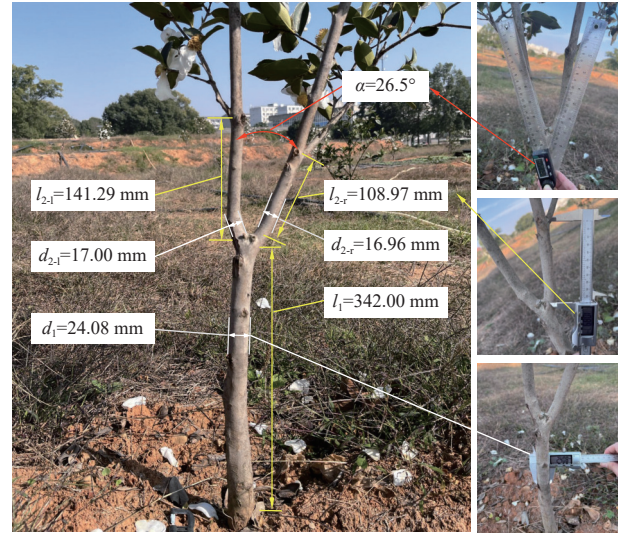
### 3.1 试验材料与工具

依托在建特色油料作物（油茶）全程机械化科研基地，选取 4 a 树龄油茶树作为试验对象（品种：华鑫），林间测量试验于 2023 年 11 月 3 日在湖南农业大学油茶基地（113°E，28°N）进行。试验设备包含万能试验机（型号：LD23.104，精度：0.008 mm，品牌：力试（上

海）科学仪器公司）、数显游标卡尺（精度：0.01 mm）、角度测量仪（精度：0.1°）、高精度电子秤（精度：0.01 g）和量筒（精度：1 mL）。

### 3.2 测定方法与数据

随机选取二叉油茶树枝，采用数显游标卡尺测量主枝长度和直径以及 2 根分枝的长度和直径，再用角度测量仪测量分枝夹角，共测量 5 个典型样本，并记录测量数据。选取树枝第一分叉点到第二分叉点的距离为主枝长度，第二分叉点分别到 2 个第三分叉点距离为 2 根分枝长度如图 6 所示，测量数据列入表 1。



注： $l_{2L}$  为左分枝长度， $\text{mm}$ ； $l_{2R}$  为右分枝长度， $\text{mm}$ ； $d_{2L}$  为左分枝直径， $\text{mm}$ ； $d_{2R}$  为右分枝直径， $\text{mm}$ ； $\alpha$  为分枝之间的夹角， $(^\circ)$ 。  
Note:  $l_{2L}$  is the length of left branch,  $\text{mm}$ ;  $l_{2R}$  is the length of right branch,  $\text{mm}$ ;  $d_{2L}$  is the diameter of left branch,  $\text{mm}$ ;  $d_{2R}$  is the diameter of right branch,  $\text{mm}$ ;  $\alpha$  is the angle between the branches,  $(^\circ)$ .

图 6 油茶树体二叉基本单元参数测量

Fig.6 Measurement for bifurcated basic unit parameters of *Camellia oleifera* tree

表 1 油茶树体二叉基本单元参数测量结果

Table 1 Measurement result for bifurcated basic unit parameters of *Camellia oleifera* tree

组别 Groups	$l_1/\text{mm}$	$d_1/\text{mm}$	$l_{2L}/\text{mm}$	$d_{2L}/\text{mm}$	$l_{2R}/\text{mm}$	$d_{2R}/\text{mm}$	$\alpha$ $(^\circ)$
1	298.00	28.61	125.38	16.64	152.22	18.43	64.5
2	342.00	24.08	141.29	17.00	108.97	16.96	26.5
3	93.13	13.20	59.32	9.93	58.81	10.03	28.7
4	194.00	19.98	115.76	12.36	154.92	15.27	43.4
5	115.89	12.55	94.31	10.09	80.99	8.18	37.6

### 3.3 油茶树参数辨识

#### 3.3.1 面积缩减系数 $\lambda$

将表 1 测量数据代入式 (1)，计算 5 个典型分叉树枝样本的面积缩减系数  $\lambda$ ，计算结果如表 2。采用均值计算法，确定  $\lambda = 0.4929$ 。

表 2 面积缩减系数  $\lambda$  计算结果

Table 2 Calculation result of lateral branching ratios  $\lambda$

组别 Groups	左分枝面积缩减系数 Lateral branching ratios of left branch	右分枝面积缩减系数 Lateral branching ratios of right branch	平均值 Average value
1	0.338 3	0.415 0	0.376 7
2	0.498 4	0.496 1	0.497 3
3	0.565 9	0.577 4	0.571 6
4	0.382 7	0.584 1	0.483 4
5	0.646 4	0.424 8	0.535 6

### 3.3.2 异速生长系数 $\beta$

对式 (2) 两边取自然对数, 得到生长异速系数 $\beta$ 为

$$\beta = \frac{\ln \frac{d_{k+1}}{d_k}}{\ln \frac{l_{k+1}}{l_k}} \quad (19)$$

采用线性回归方程式 (20) 计算异速生长系数 $\beta$ 。

$$\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} = \beta \ln \frac{l_{k+1}}{l_k} + P \quad (20)$$

式中  $P$  为常数。基于表 1 测量数据, 采用 MATLAB 软件进行线性拟合, 计算得到 $\beta = 1.333$ ,  $P = -0.04046$ 。

### 3.3.3 分枝夹角 $\alpha$

由表 1 得到分枝夹角范围为  $[26.5^\circ, 64.5^\circ]$ , 分枝角度对油茶树枝主干一阶自然频率的影响, 后续将通过理论计算和仿真试验进行分析。

### 3.3.4 油茶树枝密度 $\rho$

首先使用高精度电子秤测量树枝质量, 然后利用水浸法通过量筒测量树枝体积, 测量结果如表 3。采用均值法, 计算得到华鑫油茶树的平均密度为  $1.038 \text{ g/cm}^3$ 。

表 3 油茶树枝密度测量结果

Table 3 Measurement results of branch density for *Camellia oleifera*

组别 Groups	树枝质量 Branch mass/g	容积变化 Volume changes/mL	密度 Density/( $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ )
1	2.35	2	1.175
2	3.08	3	1.027
3	3.43	3	1.143
4	3.66	3	1.220
5	3.71	4	0.928
6	3.74	4	0.935
7	4.06	4	1.015
8	4.25	4	1.063
9	4.82	5	0.964
10	5.56	6	0.927
11	7.07	7	1.010
12	7.08	7	1.011
13	8.46	8	1.058
14	21.06	20	1.053

### 3.3.5 油茶树枝弹性模量 $E$

弯曲弹性模量是树枝的生物力学特性参数, 用于衡量树枝产生弯曲变形的难易程度。采用万能试验机测定油茶树枝的弯曲弹性模量<sup>[30]</sup>, 在树枝中部施加竖直向下外载荷, 记录对应挠度, 弯曲弹性模量计算式为

$$E = \frac{4l_{\text{span}}^3}{3\pi d^4} \left( \frac{\Delta F}{\Delta f} \right) \quad (21)$$

式中  $E$  为弯曲弹性模量, MPa;  $F$  为外载荷, N;  $l_{\text{span}}$  为跨距, mm;  $f$  为挠度, mm。

设计油茶树枝三点弯曲试验, 试验跨距为 50 mm, 压头运动速度为 10 mm/min, 如图 7 所示。记录油茶树枝三点弯曲试验的载荷-挠度变化曲线, 如图 8 所示。

选取图 8 三点弯曲试验曲线中近似线性变化区间中任意两点, 计算不同直径树枝对应试验曲线的  $\frac{\Delta F}{\Delta f}$  比值, 代入式 (21), 计算油茶树枝弯曲弹性模量, 结果如表 4。取 12 组数据平均值 1 183.97 MPa 作为华鑫油茶树枝的平

均弯曲弹性模量。

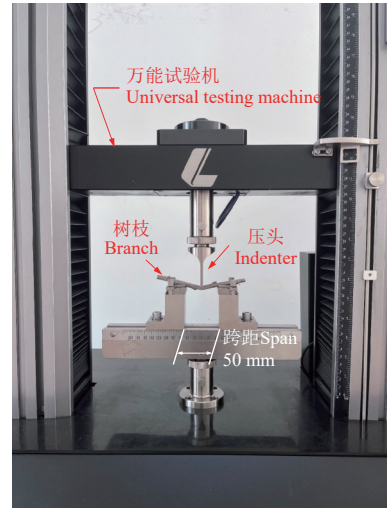
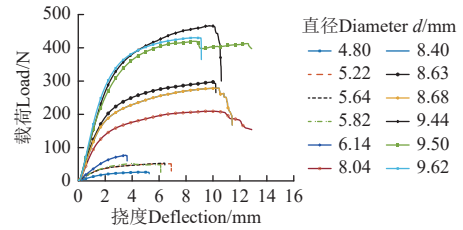


图 7 油茶树枝三点弯曲试验

Fig.7 Three-point bending test of *Camellia oleifera* branch



注: 当加载载荷突然降低 10% 以上, 加载过程中断。

Note: When the loading is abruptly decreasing by more than 10%, the testing process is terminated.

图 8 油茶树枝弯曲试验的载荷-挠度曲线

Fig.8 Load-deflection curves of branch bending test for *Camellia oleifera*

表 4 油茶树枝弯曲弹性模量

Table 4 Flexural elastic modulus of *Camellia oleifera* branch

组别 Groups	树枝直径 Branch diameter/mm	最大弯曲力 Maximum bending force /N	弯曲弹性模量 Flexural modulus of elasticity /MPa
1	4.80	26.42	1 245.38
2	5.22	51.56	1 122.05
3	5.64	53.18	1 208.14
4	5.82	52.82	1 149.37
5	6.14	77.2	1 257.33
6	8.04	209.36	1 291.92
7	8.40	300.3	1 316.26
8	8.63	297.46	1 229.92
9	8.68	278.78	1 193.12
10	9.44	466.58	999.19
11	9.50	419.8	1 064.30
12	9.62	430.28	1 130.62

## 4 自然频率理论计算与仿真分析

基于 3 种不同质点位置的油茶树枝主干一阶自然频率理论计算公式, 代入油茶树枝异速生长法则参数和生物特性参数后, 计算得到对应 3 种质点分布情况的一阶自然频率理论值, 并与仿真试验数值进行对比。

### 4.1 自然频率理论计算

如表 1 所示, 油茶树枝二分叉基本单元的主干长度和直径分别为  $l_1 = 194.00 \text{ mm}$  和  $d_1 = 19.98 \text{ mm}$ , 代入式 (1)

和 (2) 中得到分枝理论长度和直径分别为  $l_2 = 148.60 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 14.13 \text{ mm}$ 。对比表 1 数据, 分枝长度相对误差为 28.37% 和 4.08%, 分枝直径相对误差为 14.32% 和 7.47%。给定主干直径与长度, 通过面积缩减系数与异速生长系数, 计算得到理论分枝长度与直径基本符合林间实际测量数据。为进一步分析分枝夹角对自然频率的影响, 在实测角度值  $26.5^\circ \sim 64.5^\circ$  之间取 7 组数据, 计算并对比一阶自然频率理论值。将主干长度、直径与分枝夹角代入式 (14)、式 (16) 和式 (18), 计算得到二分叉基本单元主干一阶自然频率理论计算值, 如表 5。

表 5 主干一阶自然频率理论值

Table 5 Theoretical results of first-order natural frequency for trunk

$\alpha/^\circ$	一阶自然频率理论值		
	Theoretical results of first-order natural frequency / Hz		
	质点在杆顶端 Mass point located at rod top	质点在杆两端 Mass point located at both ends of rods	质点在杆质心 Mass point located at centroid of rods
30	21.350	27.238	32.882
35	21.396	27.286	32.924
40	21.449	27.341	32.972
45	21.509	27.403	33.027
50	21.576	27.472	33.088
55	21.651	27.550	33.155
60	21.734	27.635	33.229

4.2 自然频率仿真分析

采用 ANSYS Mechanical APDL 2023 软件创建油茶树二分叉基本单元有限元模型, 分枝夹角取  $60^\circ$ , 如图 9a 所示。模型参数选取第 3 节实测油茶树参数, 并选取第 4.1 节自然频率理论计算时树体形态学参数值。对油茶树二分叉基本单元模型进行有限元仿真分析, 计算得到二分叉基本单元主干一阶自然频率 25.855 Hz 和对应模态振型, 如图 9b 所示。观察模态振型, 发现一阶自然频率对应的振动形式为二分叉基本单元主干弯曲偏移, 且分枝不发生局部弯曲运动, 与第二节动力学建模振动分析一致。

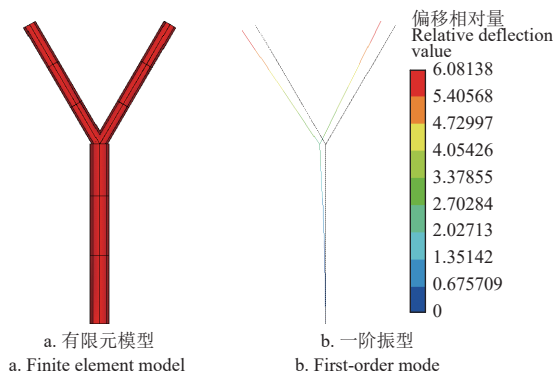


图 9 油茶树二分叉基本单元有限元模型与一阶振型  
Fig.9 Finite element model and first-order mode of bifurcated basic unit for *Camellia oleifera*

改变分枝夹角, 分析得到不同分枝角度的油茶树二分叉基本单元一阶自然频率仿真值, 如表 6。

由表 5 和表 6 可知树体二分叉基本单元分枝夹角能改变油茶树体一阶自然频率, 但是影响程度不大。对比

3 种不同质点位置分布情况的一阶自然频率理论计算值与有限元仿真值, 发现 3 种动力学模型均存在一定误差。其中, 质量均分在刚性杆两端计算所得自然频率值与仿真值较接近, 平均相对误差为 7.3%, 能满足一定应用需求。为避免油茶理想分形树体模型的累积计算误差, 需要提出树体主干自然频率高精度计算方法。

表 6 一阶自然频率仿真值

Table 6 Simulation results of first-order natural frequency							
$\alpha/^\circ$	30	35	40	45	50	55	60
自然频率 Natural frequency/Hz	25.30	25.36	25.41	25.53	25.63	25.73	25.86

5 油茶树体自然频率经验公式

5.1 经验公式推导

已知悬臂梁质量  $m$  与附加的梁顶端质点  $M$ , 其一阶自然频率计算式<sup>[31]</sup> 为

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{M + \frac{33}{140}m}} \quad (22)$$

二分叉基本单元的顶端质点不能直接用两分枝质量和表示, 需要沿分枝长度积分计算转动惯量更为准确。二分叉基本单元主干转动惯量  $J_z$  为

$$J_z = \frac{33}{140}ml_1^2 \quad (23)$$

分枝转动惯量  $J_f$  为

$$J_f = 2\rho\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \int_0^{l_2} (l_1^2 + x^2 + 2xl_1\cos\varphi_b) dx$$

$$= 2\rho\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \left(l_1^2l_2 + \frac{1}{3}l_2^3 + l_1l_2^2\cos\varphi_b\right) \quad (24)$$

将式 (23) ~ (24) 代入式 (22) 得

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{\alpha_0 \cdot 2\rho\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 l_2 \left(l_1^3 + \frac{1}{3}l_1l_2^2 + l_1^2l_2\cos\varphi_b\right) + \frac{33}{140}ml_1^3}} \quad (25)$$

式中  $\alpha_0$  为未知系数。将二分叉基本单元的主干长度与直径  $l_1 = 194.00 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 19.98 \text{ mm}$ , 和分枝长度与直径  $l_2 = 148.60 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 14.13 \text{ mm}$  以及表 6 的一阶频率仿真值代入式 (25), 求得  $\alpha_0$  值, 如表 7。

表 7 系数  $\alpha_0$  计算值

Table 7 Calculation results of coefficient $\alpha_0$							
一阶频率仿真值 First-order simulation frequency/Hz	25.30	25.36	25.41	25.53	25.63	25.73	25.86
$\alpha_0$	1.450	1.448	1.451	1.445	1.443	1.441	1.438

取均值  $\alpha_0 = 1.45$ , 由此确定二分叉基本单元一阶自然频率的经验公式为

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{\frac{33}{140}ml_1^3 + 2.9\rho\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 l_2 \left(l_1^3 + \frac{1}{3}l_1l_2^2 + l_1^2l_2\cos\varphi_b\right)}} \quad (26)$$

## 5.2 经验公式验证

考虑油茶树体实际生长过程, 主干长度与直径可能满足一定生长关系。基于表1数据以及测得部分成年树体形态学数据, 通过MATLAB进行多项式拟合, 得到油茶树主干长度 $l$ 与直径 $d$ 的拟合关系式:

$$l = P_1d^2 + P_2d + P_3 \quad (27)$$

式中系数 $P_1 = -0.04512$ ,  $P_2 = 14.39$ ,  $P_3 = -70.82$ 。

### 5.2.1 分枝夹角对一阶自然频率的影响

给定主干直径与长度, 改变分枝夹角, 对比仿真值与经验公式计算值。以主干长度 $l_1 = 400.00$  mm为例代入式(27)中, 计算得到 $d_1 = 37.01$  mm。代入式(1)~(2), 得到 $l_2 = 306.39$  mm,  $d_2 = 26.17$  mm。将计算所得直径、长度和不同夹角数据代入经验公式(26), 得到经验公式频率计算值, 并采用ANSYS Mechanical APDL 2023软件创建油茶树二叉分叉基本单元有限元仿真模型。二叉分叉基本单元一阶自然频率理论计算值与仿真值对比如图10所示。分枝角度的一阶自然频率仿真值与经验公式计算值的最大误差仅为0.41%, 远小于质量均分在杆两端理论动力学模型的平均相对误差值7.3%。

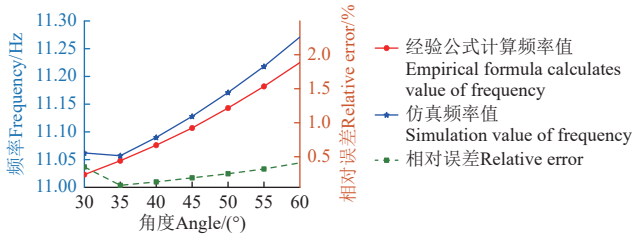


图10 不同分枝角度的一阶自然频率经验公式计算值与ANSYS仿真值对比

Fig.10 Comparison of first-order natural frequencies calculated by empirical formula with different branching angles and simulation value of ANSYS

### 5.2.2 主干长度对一阶自然频率的影响

以主干长度 $l_1 = 400.00$  mm为基准, 分枝夹角保持为 $60^\circ$ , 且主干长度以20 mm幅值递增, 代入式(27)计算得到主干直径 $d_1$ 。代入式(1)~(2), 计算分枝长度与直径。保持分枝夹角不变, 采用ANSYS Mechanical APDL 2023软件创建11个不同主干长度、直径随变的油茶树二叉分叉基本单元有限元仿真模型。二叉分叉基本单元一阶自然频率计算值与仿真值对比如图11所示。树体二叉分叉基本单元一阶自然频率随主干长度变化的经验公式计算值与仿真值几乎重合, 最大误差仅为0.41%, 远小于质量均分在杆两端理论动力学模型的相对误差平均值7.3%。

### 5.2.3 主干直径对一阶自然频率的影响

以主干直径 $d_1 = 30.00$  mm为基准, 分枝夹角保持为

$60^\circ$ 。主干直径按2 mm幅值递增, 代入式(27)中计算主干长度。代入式(1)~(2), 计算分枝长度与直径。保持分枝夹角不变, 采用ANSYS Mechanical APDL 2023软件创建11个不同主干直径、长度随变的油茶树二叉分叉基本单元有限元仿真模型。比较二叉分叉基本单元一阶自然频率计算值与仿真值, 如图12所示。树体二叉分叉基本单元一阶自然频率随主干直径变化的经验公式计算值与仿真值几乎重合, 最大相对误差仅为0.40%, 远小于质量均分在杆两端理论动力学模型的相对误差平均值7.3%, 以上分析证明了一阶自然频率经验公式的有效性。

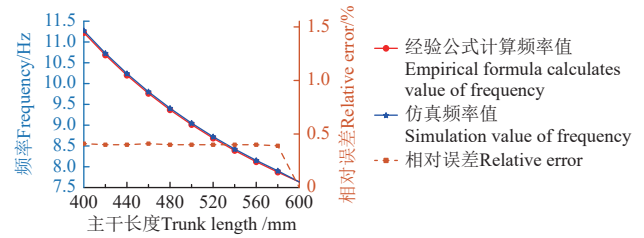


图11 不同主干长度的一阶自然频率经验公式计算值与ANSYS仿真值对比

Fig.11 Comparison of first-order natural frequency calculated by empirical formula with different trunk lengths and simulation value of ANSYS

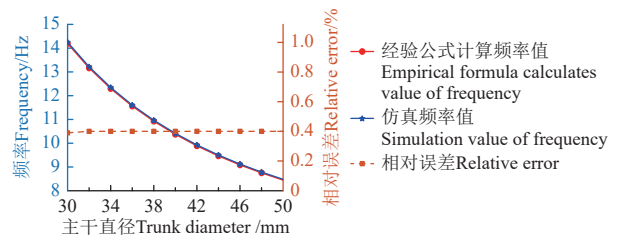


图12 不同主干直径的一阶自然频率经验公式计算值与仿真值对比

Fig.12 Comparison of first-order natural frequency calculated by empirical formula with different trunk diameters and simulation value of ANSYS

## 6 油茶树二叉分叉基本单元振动试验

为进一步研究油茶树二叉分叉基本单元自由振动情况, 并验证油茶树体自然频率经验公式和有限元仿真分析的准确性, 依托在建特色油料作物(油茶)全程机械化科研基地, 选取4 a油茶树作为试验对象(品种: 华鑫), 随机选取3组油茶二叉分叉树枝进行模态测试试验。

在样本主枝上选取适当位置固定加速度传感器, 将二叉分叉基本单元主干固定端采用夹具固定, 如图13所示。拉动分枝自由端产生一定位移后, 随后释放分枝, 利用模态分析仪对动态加速度信号进行数据采集和频率分析, 得到样本树枝主干自然频率如图14所示。

将样本树枝参数代入经验公式(26), 得到样本树枝主干一阶自然频率理论计算值, 并与实际试验值对比, 结果如表8。

通过油茶树二叉分叉基本单元振动试验得到的自然频率实测值与经验公式自然频率计算值相对误差分别为

4.57%、6.24% 和 7.29%，均值为 6.030%，验证了油茶树二分叉基本单元主干一阶自然频率经验公式的准确性。

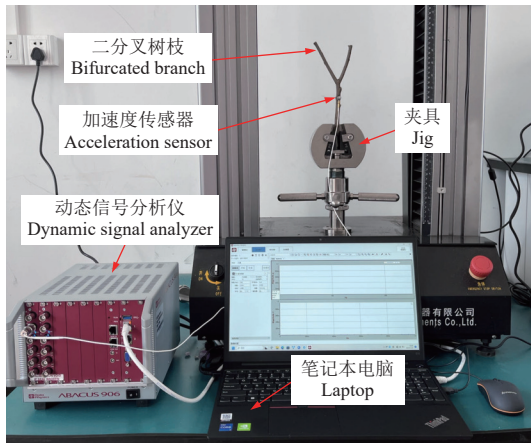


图 13 油茶样本二分叉树枝振动试验  
Fig.13 Vibration test of bifurcated branches of *Camellia oleifera* sample

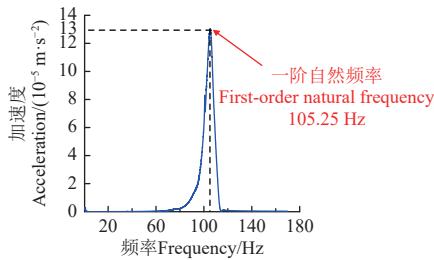


图 14 油茶样本二分叉树枝一阶自然频率  
Fig.14 First-order natural frequency of bifurcated branch sample of *Camellia oleifera* sample

表 8 经验公式计算频率值与试验频率值对比

Table 8 Comparison of calculated frequency by empirical formula and experimental frequency

组别 Groups	$l_1/mm$	$d_1/mm$	经验公式计算频率值 Calculated frequency by empirical formula /Hz	试验频率值 Test frequency /Hz	相对误差 Relative error/%
1	68.34	9.67	100.44	105.25	4.57
2	58.76	8.81	123.82	132.06	6.24
3	75.43	10.13	86.43	93.23	7.29

### 7 结 论

本文建立油茶树二分叉基本单元的 3 种质量-弹簧动力学模型，推导主干一阶自然频率计算表达式，进一步提出一种油茶树主干一阶自然频率经验计算公式。采用带端部质点的悬臂梁一阶自然频率计算公式，通过沿分枝长度方向积分，实现油茶树高精度自然频率计算，并得到以下结论：

- 1) 根据合轴分枝生长方式，提取油茶树二分叉基本单元，采用质量-弹簧模型推导 3 种不同质点分布的动力学模型，分析发现二分叉基本单元主干一阶自然频率理论计算值与 ANSYS 软件所得自然频率仿真值存在一定误差；
- 2) 质量均分在刚性杆两端的动力学模型所得一阶自然频率理论计算值与 ANSYS 软件所得自然频率仿真值误差较小，平均相对误差值为 7.3%，适用于自然频率中

等精度计算要求；

3) 基于带端部质点的悬臂梁一阶自然频率计算公式，采用参数辨识方法推导二分叉基本单元主干一阶自然频率经验公式，所得自然频率计算值与 ANSYS 软件仿真值误差最小，最大误差仅为 0.41%。经验公式计算值与试验值的平均相对误差为 6.03%，适用于油茶树主干一阶自然频率高精度计算要求。

### [参 考 文 献]

[1] GAO L, JIN L, LIU Q, et al. Recent advances in the extraction, composition analysis and bioactivity of *Camellia (Camellia oleifera Abel.)* oil[J]. Trends in Food Science & Technology, 2023, 143: 104211.

[2] 张立伟, 王辽卫. 我国油茶产业的发展现状与展望[J]. 中国油脂, 2021, 46(6): 6-9, 27.

ZHANG Liwei, WANG Liaowei. Prospect and development status of oil-tea camellia industry in China[J]. China Oils and Fats, 2021, 46(6): 6-9, 27. (in Chinese with English abstract)

[3] 严茂林, 付晓宇, 陈畅, 等. 大食物观下我国木本油料高质量发展的潜力挖掘、现实约束和对策建议[J]. 中国油脂, 2024, 49(6): 11-17.

YAN Maolin, FU Xiaoyu, CHEN Chang, et al. Potential exploration, realistic constraints and countermeasures for the high-quality development of woody oilseeds in China under the perspective of all-encompassing approach to food[J]. China Oils and Fats, 2024, 49(6): 11-17. (in Chinese with English abstract)

[4] 孟桂元, 韩杰铨, 詹兴国, 等. 我国油茶产业分析与发展对策[J]. 中国油脂, 2021, 46(7): 104-108, 113.

MENG Guiyuan, HAN Jiecheng, ZHAN Xingguo, et al. Industry analysis and development strategy of oil-tea camellia in China[J]. China Oils and Fats, 2021, 46(7): 104-108, 113. (in Chinese with English abstract)

[5] 国家林草局和草原局 国家发展和改革委员会 财政部关于印发《加快油茶产业发展三年行动方案（2023—2025 年）》的通知-国务院部门文件-中国政府网[EB/OL]. (2022-12-20) [2024-7-17]. [https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2023-01/10/content\\_5736075.htm](https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2023-01/10/content_5736075.htm)

[6] 陈吉朋, 汪亚东, 周宏平. 油茶果采收机械与分选技术综述[J]. 林业工程学报, 2024, 9(4): 12-24.

CHEN Jipeng, WANG Yadong, ZHOU Hongping. Research on *Camellia oleifera* fruit harvesting machinery and sorting technology[J]. Journal of Forestry Engineering, 2024, 9(4): 12-24. (in Chinese with English abstract)

[7] 李正超, 唐乐为, 吴明亮, 等. 偏移剪叉式油茶果收集装置设计与试验[J]. 农业工程学报, 2024, 40(3): 62-71.

LI Zhengchao, TANG Lewei, WU Mingliang, et al. Design and test of the fruit collecting device of *Camellia oleifera* with angular scissor mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE), 2024, 40(3): 62-71. (in Chinese with English abstract)

[8] 郑永军, 江世界, 陈炳太, 等. 丘陵山区果园机械化技术与装备研究进展[J]. 农业机械学报, 2020, 51(11): 1-20.

ZHENG Yongjun, JIANG Shijie, CHEN Bingtai, et al. Review

- on technology and equipment of mechanization in hilly orchard[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery*, 2020, 51(11): 1-20. (in Chinese with English abstract)
- [9] 杜小强, 李党伟, 贺磊盈, 等. 基于电子果实技术的机械振动采收过程果实运动分析[J]. *农业工程学报*, 2017, 33(17): 58-64.  
DU Xiaoqiang, LI Dangwei, HE Leiying, et al. Fruit motion analysis in process of mechanical vibration harvesting based on electronic fruit technique[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, 2017, 33(17): 58-64. (in Chinese with English abstract)
- [10] 崔王斌, 周宏平, 许林云, 等. 我国林果机械振动式采收装备及理论研究进展[J]. *世界林业研究*, 2023, 36(6): 64-70.  
CUI Wangbin, ZHOU Hongping, XU Linyun, et al. Research progress in mechanically vibratory harvesting equipment of forest fruit and its theory in China[J]. *World Forestry Research*, 2023, 36(6): 64-70. (in Chinese with English abstract)
- [11] 陈度, 杜小强, 王书茂, 等. 振动式果品收获技术机理分析及研究进展[J]. *农业工程学报*, 2011, 27(8): 195-200.  
CHEN Du, DU Xiaoqiang, WANG Shumao, et al. Mechanism of vibratory fruit harvest and review of current advance[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, 2011, 27(8): 195-200. (in Chinese with English abstract)
- [12] MURPHY K D, RUDNICKI M. A physics-based link model for tree vibrations[J]. *American Journal of Botany*, 2012, 99(12): 1918-1929.
- [13] LÁNG Z, CSORBA L. A two degree of freedom damped fruit tree model[J]. *Agricultural Engineering International: CIGR Journal*, 2015, 17(3): 335-341.
- [14] 林欢, 许林云, 宣言, 等. 基于集中质量的银杏树动力学建模研究[J]. *中国农机化学报*, 2019, 40(11): 81-88.  
LIN Huan, XU Linyun, XUAN Yan, et al. Study on kinetic modeling of *Ginkgo tree* based on concentrated mass[J]. *Journal of Chinese Agricultural Mechanization*, 2019, 40(11): 81-88. (in Chinese with English abstract)
- [15] ZHOU J, XU L, ZHANG A, et al. Finite element explicit dynamics simulation of motion and shedding of jujube fruits under forced vibration[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2022, 198: 107009.
- [16] HOSHYARMANESH H, DASTGERDI H R, GHODSI M, et al. Numerical and experimental vibration analysis of olive tree for optimal mechanized harvesting efficiency and productivity[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2017, 132: 34-48.
- [17] DU X, HAN X, SHEN T, et al. Natural frequency identification model based on BP neural network for *Camellia oleifera* fruit harvesting[J]. *Biosystems Engineering*, 2024, 237: 38-49.
- [18] 林欢, 许林云, 周宏平, 等. 机械采收作业中银杏树频谱特性与振动响应关系研究(英文)[J]. *农业工程学报*, 2017, 33(17): 51-57.  
LIN Huan, XU Linyun, ZHOU Hongping, et al. Relationship between frequency spectrum characteristics and vibration responses of *Ginkgo biloba* trees during mechanical harvesting operation[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, 2017, 33(17): 51-57. (in Chinese with English abstract)
- [19] WANG R, FANG D, WU C, et al. Dynamic response of *Camellia oleifera* fruit-branch based on mathematical model and high-speed photography[J]. *Biosystems Engineering*, 2024, 237: 232-241.
- [20] 李斌, 陆华忠, 吕恩利, 等. 荔枝树枝能量传递特性与去梗式振动采摘作业参数[J]. *农业工程学报*, 2018, 34(8): 18-25.  
LI Bin, LU Huazhong, LYU Enli, et al. Characterizing energy transfer of litchi branches and working parameters of destemmed vibrational picking[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, 2018, 34(8): 18-25. (in Chinese with English abstract)
- [21] LANG Z. A one degree of freedom damped fruit tree model[J]. *Transactions of the ASABE*, 2008, 51(3): 823-829.
- [22] 伍德林, 赵恩龙, 姜山, 等. 基于能量传递规律的油茶树冠层振动参数优化与试验[J]. *农业机械学报*, 2022, 53(8): 23-33.  
WU Dein, ZHAO Enlong, JIANG Shan, et al. Optimization and experiment of canopy vibration parameters of *Camellia oleifera* based on energy transfer characteristics[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery*, 2022, 53(8): 23-33. (in Chinese with English abstract)
- [23] 翁凌云, 许林云. Y型果树动力学模型假设与分析[J]. *农机化研究*, 2013, 35(4): 19-24.  
WENG Linyun, XU Linyun, et al. Analysis on mechanical model assumption of Y-trellis trees[J]. *Journal of Agricultural Mechanization Research*, 2013, 35(4): 19-24. (in Chinese with English abstract)
- [24] CASTRO-GARCIA S, BLANCO-ROLDAN G L, GIL-RIBES J A. Vibrational and operational parameters in mechanical cone harvesting of stone pine (*Pinus pinea* L.)[J]. *Biosystems Engineering*, 2012, 112(4): 352-358.
- [25] 许林云, 刘冠华, 周杰, 等. 用于振动采收的有果有叶果树振动模型构建[J]. *农业工程学报*, 2020, 36(11): 1-12.  
XU Linyun, LIU Guanhua, ZHOU Jie, et al. Construction of the vibration model of the fruit trees with fruits and leaves for vibration harvesting[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, 2020, 36(11): 1-12. (in Chinese with English abstract)
- [26] 黄强. 结合树木分枝方式构建树木骨架方法研究[D]. 保定: 河北农业大学, 2019.  
HUANG Qiang. Study on the Method of Constructing Tree Skeleton by Collecting Branches[D]. Baoding: Hebei Agricultural University, 2019. (in Chinese with English abstract)
- [27] RODRIGUEZ M, EMMANUEL D L, BRUNO M. A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization[J]. *American Journal of Botany*, 2008, 95(12): 1523-1537.
- [28] WANG J. Mechanical coffee harvesting[J]. *American Society of Agricultural and Biological Engineers*, 1965, 8(3): 400-402.
- [29] THECKES B, LANGRE D E, BOUTILLON X. Damping by branching: a bioinspiration from trees[J]. *Bioinspiration Biomimetics*, 2011, 6(4): 046010.

- [30] 陈志健. 面向机械振动采收的油茶树冠层识别与分析[D]. 合肥: 安徽农业大学, 2021.  
CHEN ZhiJian. Identification and Analysis of *Camellia Oleifera* Canopy for Mechanical Vibration Harvesting[D]. Hefei: Anhui Agricultural University, 2021. (in Chinese with English abstract)
- [31] TANG L, GOUTTEFARDE M, SUN H, et al. Dynamic modelling and vibration suppression of a single-link flexible manipulator with two cables[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 162: 104347.

## Empirical formula for the natural frequency of *Camellia oleifera* trunk using allometric growth

ZHANG Shiyi<sup>1</sup>, TANG Lewei<sup>1,2\*</sup>, WU Mingliang<sup>1,2</sup>, LI Zhengchao<sup>1</sup>, ZHANG Huiyu<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Hunan Agricultural University, Changsha 410128, China; 2. Specialty Oil Crop (*Camellia oleifera*) Full Mechanization Research Center, Changsha 410128, China))

**Abstract:** *Camellia oleifera* can significantly guarantee food safety in the edible oil industry. The manual harvesting of *Camellia oleifera* has greatly restricted the full mechanization of the *Camellia oleifera* industry. Vibratory mechanized harvesting has been adopted with the high harvesting efficiency of *Camellia oleifera* fruit. Existing studies have also proved that the vibratory picking frequency can directly dominate the detachment of forest fruits. There is a high demand to establish the dynamics model of the *Camellia oleifera* tree, in order to calculate the trunk's natural frequency. In this study, an ideal fractal tree model was investigated for the *Camellia oleifera*, according to the sympodial branching and allometric growth. The bifurcated basic unit was extracted from the fractal tree model. Three dynamics models were then deduced with the point masses at different locations using the classic mass-spring analysis. Consequently, the theoretical expressions of the first-order natural frequency were derived for three dynamics models. Taking *Camellia oleifera* (variety: Huaxin) in Hunan Province as an application example, the lateral branching ratio and the slenderness coefficient were identified to measure the morphological parameters of the tree. Subsequently, the branch density and flexural elastic modulus were measured by water immersion and a three-point bending test. The theoretical values of the first-order natural frequency were calculated for the bifurcated basic unit with different branching angles, in order to substitute the identified tree parameters. Then, a finite element simulation model of the bifurcated basic unit for *Camellia oleifera* was constructed to simulate the natural frequency. Compared with the simulated and theoretical frequency value, the dynamics model with point mass equally distributed at both rod ends was the closest to the simulated model, with an average error of 7.3%. Finally, the mathematical formula was obtained with the first-order natural frequency of the cantilever beam with point mass at the rod top. An empirical calculation formula was derived for the bifurcated basic unit using parameter identification. The smallest error was found between the theoretical natural frequency from the empirical formula and the simulated value, with a maximum error of 0.41%. The validity and accuracy of the empirical formula were verified. The finding can provide the theoretical guidelines to optimize the vibration parameters of fruit harvesting machines for *Camellia oleifera*.

**Keywords:** frequency; vibration; *Camellia oleifera*; allometric growth law; empirical formula; bifurcated basic unit